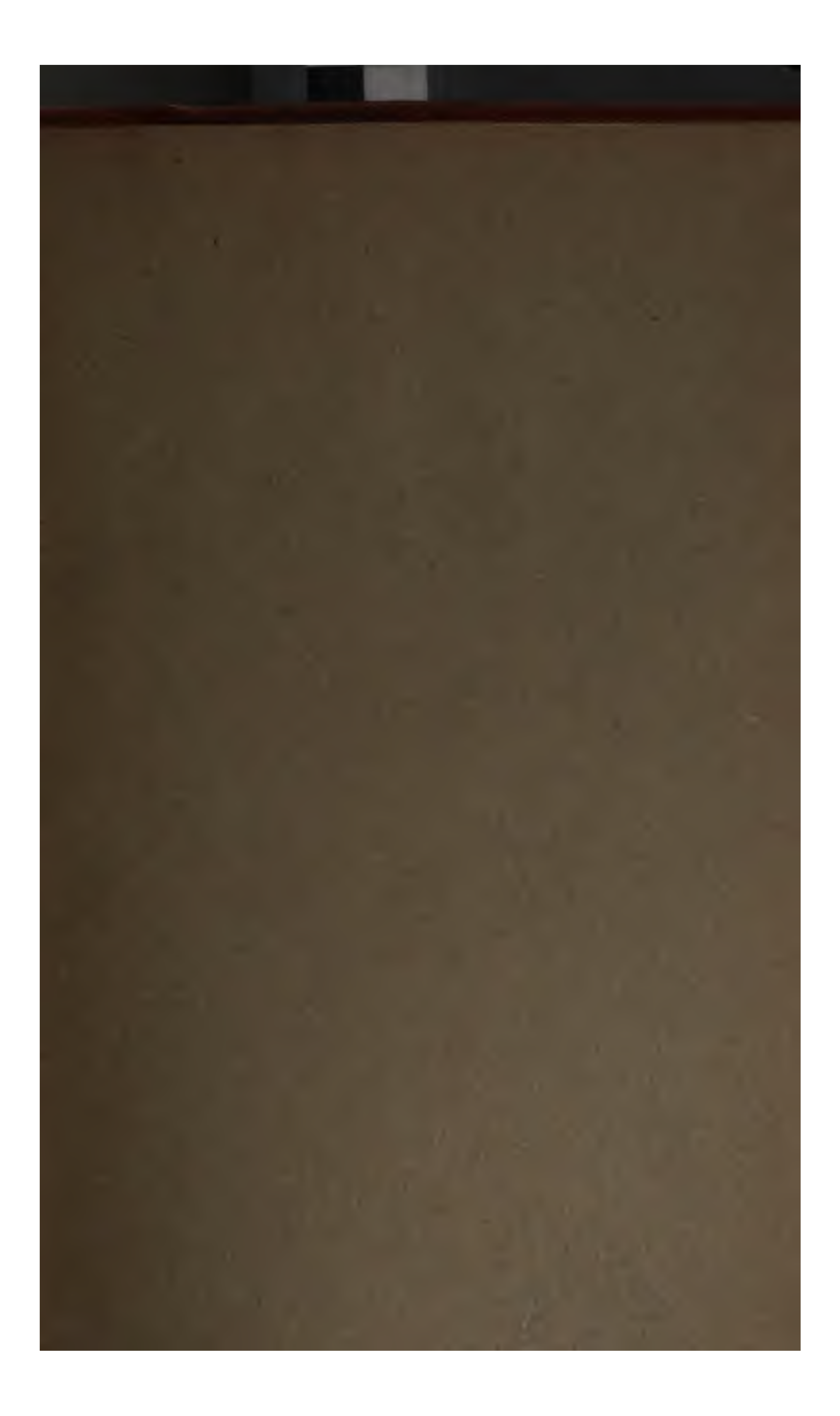






COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

THÉORIE

DU

POTENTIEL NEWTONIEN

LEÇONS PROFESSÉES A LA SORBONNE

PENDANT LE PREMIER SEMESTRE 1894-1895

PAR

H. POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES

PAR

ÉDOUARD LEROY
Ancien élève de l'École normale supérieure,
Docteur ès sciences.

GEORGES VINCENT
Agrégé-préparateur à l'École normale supérieure.



PARIS
GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, 3

1899

THÉORIE

DU

POTENTIEL NEWTONIEN

LEÇONS PROFESSÉES A LA SORBONNE

PENDANT LE PREMIER SEMESTRE 1894-1895

PAR

H. POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES

PAR

Édouard LE ROY
Ancien élève de l'École normale supérieure,
Docteur ès sciences.

Georges VINCENT
Agrégé-préparateur à l'École normale
supérieure.

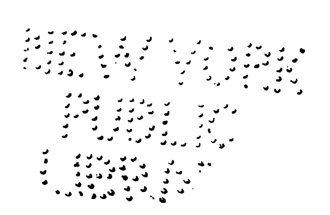


PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1899



THÉORIE

DU

POTENTIEL NEWTONIEN

THÉORIE

DU

POTENTIEL NEWTONIEN

LEÇONS PROFESSÉES A LA SORBONNE

PENDANT LE PREMIER SEMESTRE 1894-1895

PAR

H. POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES

PAR

Édouard LE ROY
Ancien élève de l'École normale supérieure,
Docteur ès sciences.

Georges VINCENT
Agrégé-préparateur à l'École normale supérieure.

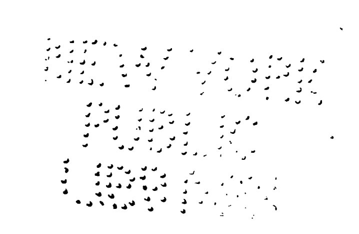


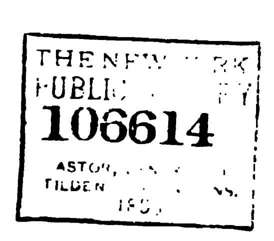
PARIS

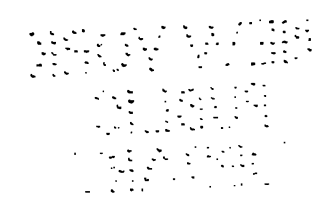
GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1899




THE NEW
PUBLIC
106614
ASTOR,
TILDEN



THÉORIE

DU

POTENTIEL NEWTONIEN

CHAPITRE PREMIER

POTENTIEL EN UN POINT EXTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES ÉQUATION DE LAPLACE EXEMPLES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

1. Définition du potentiel en général. — Soit un point mobile M attiré par n points fixes P_1, P_2,..., P_n. (fig. 1). Désignons par x, y, z les coordonnées du point M, par a_i, b_i, c_i celles du point P_i, et par r_i la distance MP_i. Cette distance est donnée par la relation :

$$r_i^2 = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2.$$

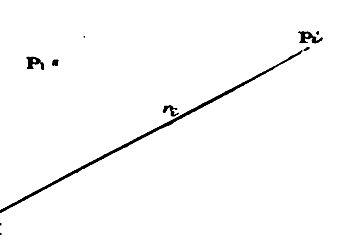


Fig. 1.

Enfin, soit $f'_i(r_i)$ la valeur de l'attraction qu'exerce le point P_i sur le point M. Les composantes de cette attraction sont :

$$X_i = f'_i(r_i)\frac{a_i - x}{r_i},$$

$$Y_i = f'_i(r_i)\frac{b_i - y}{r_i},$$

$$Z_i = f'_i(r_i)\frac{c_i - z}{r}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Si l'on suppose que l'attraction [illegible] du carré de la distance, le potentiel [illegible] On a, dans ce cas

[illegible]

[illegible] de la masse du point attirant P, l'unité choisie étant la [illegible] du point attiré M.

L'expression du potentiel est donc :

$$V = \sum \frac{m}{r},$$

et celle des composantes de l'attraction :

$$X = \sum m \frac{a - x}{r^3},$$

$$Y = \sum m \frac{b - y}{r^3},$$

$$Z = \sum m \frac{c - z}{r^3}.$$

S'il n'y a qu'un point attirant et si sa masse est égale à 1, les expressions précédentes deviennent :

$$V = \frac{1}{r},$$

$$X = \frac{a - x}{r^3}, \quad Y = \frac{b - y}{r^3}, \quad Z = \frac{c - z}{r^3}.$$

3. Potentiel logarithmique. — On appelle ainsi le potentiel obtenu en supposant que l'attraction varie en raison inverse de la distance. On a donc :

$$f'_i(r_i) = \frac{m_i}{r_i}, \quad f_i(r_i) = m_i \log \frac{r_i}{r_0},$$

r_0 désignant une constante.

On en déduit sans peine les formules suivantes :

$$V = \sum m \log \frac{r_0}{r},$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \sum m \frac{a - x}{r^2},$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \sum m \frac{b - y}{r^2},$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = \sum m \frac{c - z}{r^2}$$

Remarque. — Supposons que le point M s'éloigne indéfiniment, $\sum \frac{m}{r}$ tendra vers 0. Au contraire, $\sum m \log \frac{r_0}{r}$ tendra vers $-\infty$. Ainsi l'on peut dire qu'à l'infini le potentiel newtonien s'annule, au lieu que le potentiel logarithmique est égal à $-\infty$.

4. Equation de Laplace. — Formons les dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, du potentiel newtonien en un point distinct des points attirants.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3\sum m \frac{(a-x)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 3\sum m \frac{(b-y)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3\sum m \frac{(c-z)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3}.$$

Ajoutons ces trois relations membre à membre et appelons, suivant la notation connue, ΔV la somme des trois dérivées secondes que nous venons de calculer ; il vient :

$$\Delta V = 3\sum m \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^5} - 3\sum \frac{m}{r^3}$$

$$= 3\sum \frac{m}{r^3} - 3\sum \frac{m}{r^3} = 0.$$

Le potentiel newtonien satisfait donc, dans l'espace à trois dimensions, à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ en tout point distinct des points attirants.

Pareillement, *le potentiel logarithmique satisfait, dans le plan, à l'équation de Laplace* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ *que l'on écrit encore* $\Delta V = 0$. On a en effet pour ce potentiel :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\sum m \frac{(a-x)^2}{r^4} - \sum \frac{m}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\sum m \frac{(b-y)^2}{r^4} - \sum \frac{m}{r^2}.$$

Ajoutons membre à membre en remarquant que

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

On peut, de même, définir, dans l'espace à n dimensions, un potentiel analogue au potentiel newtonien dans l'espace à trois dimensions et au potentiel logarithmique dans le plan. Appelons $x_1, x_2, \ldots x_n$ les coordonnées d'un point de l'espace à n dimensions ; le potentiel en question sera une fonction V de n variables satisfaisant à l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0,$$

qui est la généralisation de l'équation de Laplace. Le potentiel ainsi obtenu correspond à une attraction proportionnelle à $\frac{1}{r^{n-1}}$; r désigne toujours la distance du point attiré $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à un point attirant $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et est donné par l'expression :

$$r^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots\ldots + (x_n - a_n)^2.$$

5. Limites supérieures des dérivées de $\frac{1}{r}$. — Avant d'aller plus loin, nous allons indiquer des limites supérieures pour quelques-unes des dérivées de $\frac{1}{r}$. Ces limites supérieures nous seront utiles dans la suite. On a :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{a - x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = \frac{3(a - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^3} = 15\frac{(a - x)^3}{r^7} - 9\frac{a - x}{r^5},$$

et des formules analogues pour les dérivées en y et en z. On conclut sans peine de ces formules les inégalités suivantes :

$$
\left|\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right| < \frac{1}{r^2},
$$
$$
(1) \qquad \left|\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\right| < \frac{4}{r^3},
$$
$$
\left|\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^3}\right| < \frac{24}{r^4},
$$

et ainsi de suite.

6. Potentiel des corps continus. — Jusqu'ici nous n'avons considéré que des points attirants discrets. Considérons maintenant des distributions continues de masses attirantes ; il y en a de trois sortes : volumes, surfaces, lignes. Nous allons étudier leur action sur un point M (x, y, z) portant l'unité de masse et définir un potentiel. Nous envisagerons d'abord le cas où le point M est *extérieur* aux masses agissantes, c'est-à-dire tel qu'on puisse entourer ce point d'une surface fermée de dimensions finies ne contenant aucune des masses considérées.

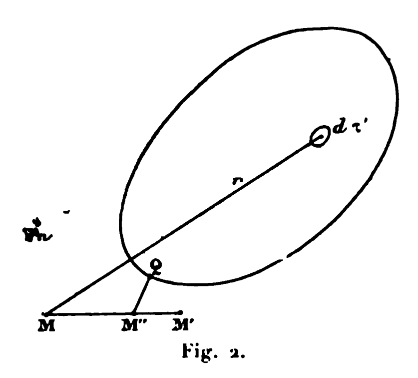


Fig. 2.

1° *Volumes attirants.* — Soit un tel volume ; appelons (fig. 2) :

dτ', un élément de ce volume ;

x', y', z', les coordonnées de son centre de gravité ;

μ', la densité en ce point;
x, y, z, les coordonnées du point attiré;
μ' est une fonction de x', y', z'.

L'élément $d\tau'$ exerce sur M une attraction dont la composante parallèle à Ox est :

$$\frac{\mu' d\tau' (x' - x)}{r^3}, \quad r^2 = \Sigma (x' - x)^2;$$

la composante relative au volume tout entier est :

$$X = \int \frac{\mu' d\tau' (x' - x)}{r^3};$$

les deux autres composantes sont de même :

$$Y = \int \frac{\mu' d\tau' (y' - y)}{r^3},$$

$$Z = \int \frac{\mu' d\tau' (z' - z)}{r^3},$$

et le potentiel :

$$V = \int \frac{\mu' d\tau'}{r},$$

les intégrales étant étendues au volume considéré. V, X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z.

Calculons les dérivées du premier ordre de V. Montrons qu'il suffit, pour les obtenir, de différentier la fonction qui est sous le signe $\int$ et d'écrire par exemple :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau'.$$

Posons en effet :

$$\frac{1}{r} = f(x, y, z).$$

On a

$$V = \int \mu' f(x, y, z)\, d\tau'.$$

Par définition :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim \frac{1}{h}\left[\int \mu' f(x+h, y, z)\, d\tau' - \int \mu' f(x, y, z)\, d\tau'\right],$$

quand h tend vers 0, ce qui donne :

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \lim \int \mu'\left[f'_x(x) + \frac{h}{2} f''_{x^2}(x+\theta h)\right] d\tau' \; 0 < \theta < 1.$$

Il est facile de voir que :

$$h \int \mu' f''_{x^2}(x+\theta h, y, z)\, d\tau',$$

tend vers 0 avec h; car, en vertu des inégalités (1), on a :

$$\left| f''_{x^2}(x+\theta h, y, z)\right| < \frac{4}{r^3},$$

r désignant la distance au point x', y', z' du point M″ qui a pour coordonnées $x + \theta h$, y, z (fig. 2). Or, quel que soit le point x', y', z', r est inférieur à M″Q, Q désignant le point du volume le plus rapproché du point M″. Bref on a :

$$(3) \quad \left| f''_{x^2}(x+\theta h, y, z)\right| < \frac{4}{\overline{M''Q}^3}.$$

De plus, lorsque h tend vers zéro, M″ tend vers M et M″Q tend vers une limite *différente de zéro*, puisque M est extérieur au volume attirant; donc le produit :

$$h f''_{x^2}(x+\theta h, y, z),$$

tend vers zéro avec h et, en vertu de la relation (2), on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' f'_x(x, y, z)\, d\tau' = \int \mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\, d\tau'.$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Remplaçons maintenant $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$ par sa valeur, $\frac{\partial V}{\partial x}$ prend la forme

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' \frac{x'-x}{r^3}\, d\tau' = X.$$

Pareillement :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = Z,$$

formules identiques à celles que nous avons trouvées dans le cas d'un potentiel de points attirants discrets.

Comme nous avons différentié une première fois sous le signe $\int$ et pour la même raison, nous pouvons différentier une deuxième fois et obtenir ainsi les dérivées secondes de V. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int \mu' \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right] d\tau' = 0.$$

Le potentiel d'un volume attirant satisfait donc à l'équation de Laplace en tous les points extérieurs aux masses agissantes.

2° *Surfaces attirantes. — Lignes attirantes.* — Les mêmes considérations s'appliquent aux surfaces et aux lignes attirantes. Désignons par $d\omega'$ un élément d'une surface attirante (S) et par dl' un élément de longueur d'une ligne attirante (L), les autres notations gardant les mêmes significations que précédemment; on a pour les potentiels les expressions suivantes :

$$\text{Surface : } V = \int \frac{\mu'}{r} d\omega',$$

$$\text{Ligne : } V = \int \frac{\mu'}{r} dl',$$

la première intégrale étant étendue à la surface entière et la seconde à tous les éléments de longueur de la ligne.

Les composantes de l'attraction s'obtiennent de même en différentiant sous le signe $\int$:

$$\text{Surface : } X = \frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega'$$

etc...

$$\text{Ligne : } X = \frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dl',$$

etc...

Enfin les dérivées secondes s'obtiennent encore par différentiation sous le signe $\int$ et vérifient par conséquent l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0.$$

Tout ceci ne s'applique, comme pour les volumes, qu'aux points extérieurs aux masses agissantes.

3° *Potentiel logarithmique.* — Il possède dans le plan — toujours en dehors des masses agissantes — pour les aires et les lignes attirantes les propriétés que nous venons de reconnaître au potentiel newtonien dans l'espace.

7. Propriétés à l'infini. — Soit ρ la distance à l'origine du point attiré M; quand M s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire quand ρ

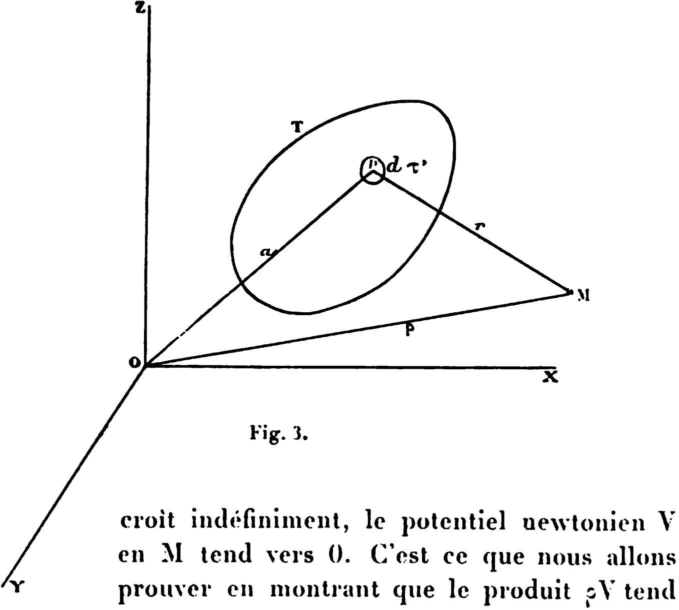


Fig. 3.

croît indéfiniment, le potentiel newtonien V en M tend vers 0. C'est ce que nous allons prouver en montrant que le produit ρV tend vers une limite finie et en calculant cette limite.

Soit (fig. 3) T un volume attirant, $d\tau'$ un élément de ce volume, P son centre de gravité, a la distance de P à l'origine O des coordonnées, M le point attiré, r la distance PM et ρ la distance OM. On a :

$$\rho - a < r < \rho + a,$$

et, par suite, on peut poser :

$$r = \rho + \theta a,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$.

Le potentiel V a pour expression :

$$V = \int \frac{\mu'}{\rho + \theta a} d\tau'.$$

Formons le produit ρV :

$$\rho V = \int \frac{\mu' \rho}{\rho + \theta a} d\tau' = \int \mu' d\tau' - \int \frac{\mu' \theta a d\tau'}{\rho + \theta a}, \tag{4}$$

les intégrales étant étendues au volume T.

De l'égalité (4), on tire :

$$\rho V - \int \mu' d\tau' = - \int \frac{\mu' \theta a d\tau'}{\rho + \theta a}.$$

On voit sans peine que le second membre de cette dernière égalité tend vers 0 quand ρ augmente indéfiniment. On a donc :

$$\operatorname{Lim} \left(\rho V - \int \mu' d\tau' \right) = 0,$$

ou

$$\operatorname{Lim} \rho V = \int \mu' d\tau' = M,$$

en appelant M la masse attirante totale.

Le raisonnement s'étend sans aucune modification au cas d'une surface attirante, d'une ligne attirante ou d'un ensemble de volumes, de surfaces et de lignes.

8. — Passons au cas du potentiel logarithmique dans le plan. Soit S une surface plane attirante. Le potentiel V en un point M

de son plan (fig. 4) a pour expression, en reprenant les notations connues :

$$V = \int \mu' \log \frac{r_0}{r} \, d\omega'.$$

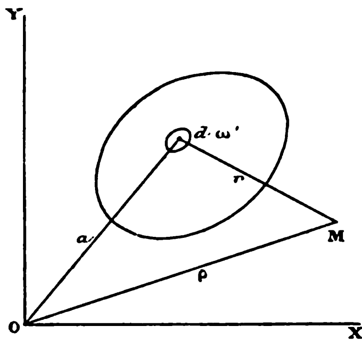


Fig. 4.

Voyons comment V se comporte à l'infini. Posons :

$$V_0 = \log \frac{r_0}{\rho} \int \mu' d\omega' = M \log \frac{r_0}{\rho},$$

M désignant la masse attirante totale et ρ la distance du point M à l'origine. Formons la différence $V - V_0$:

$$V - V_0 = \int \mu' \log \frac{\rho}{r} \, d\omega' = -\int \mu' \log \frac{\rho + \theta a}{\rho} \, d\omega'.$$

Or on a :

$$\left| \log \frac{\rho + \theta a}{\rho} \right| = \left| \log \left(1 + \frac{\theta a}{\rho} \right) \right| < \left| \frac{\theta a}{\rho} \right| < \frac{a}{\rho} < \frac{\alpha}{\rho},$$

α désignant une limite supérieure de a ; on en conclut :

$$\left| V - V_0 \right| < \left| \int \mu' \frac{a}{\rho} \, d\omega' \right| < \frac{\alpha}{\rho} \, \mu_0 \int d\omega',$$

μ_0 étant une limite supérieure de μ'. Si l'on désigne par S l'aire de la surface attirante, on a :

$$S = \int d\omega',$$

et l'on voit que :

$$\left| V - V_0 \right| < \frac{\alpha}{\rho} \mu_0 S;$$

par conséquent :

$$\text{Lim} \mid V - V_0 \mid = 0,$$

quand ρ augmente indéfiniment.

On peut donc écrire l'égalité asymptotique :

$$V \backsim M.\log \frac{r_0}{\rho}.$$

9. Potentiel newtonien d'une surface sphérique homogène. — Nous allons, à titre d'exemples, calculer le potentiel dans quelques cas simples.

Soit une surface attirante sphérique, homogène, de densité μ'; soient O son centre, a son rayon (fig. 5) et M, un point extérieur,

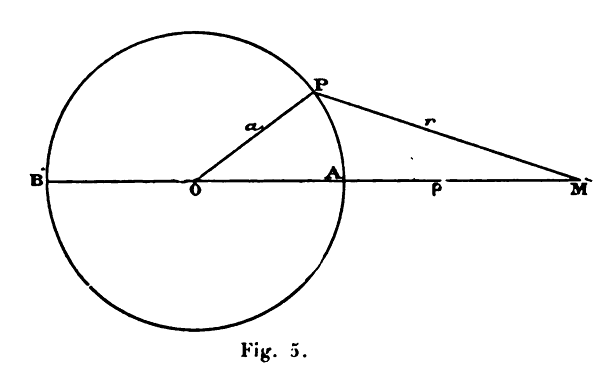


Fig. 5.

pour lequel nous voulons avoir la valeur du potentiel. Soit P le centre de gravité d'un élément $d\omega'$ de la sphère; menons le diamètre AB issu de M. Posons :

$$MP = r; \quad OP = a; \quad OM = \rho; \quad \text{angle } MOP = \theta.$$

Le potentiel en M a pour valeur :

$$V = \int \frac{\mu'}{r} d\omega',$$

ou, en supposant l'unité de masse telle que $\mu' = 1$,

(5) $$V = \int \frac{1}{r} d\omega',$$

l'intégrale étant étendue à la surface de la sphère. C'est cette intégrale que nous nous proposons d'évaluer.

Décrivons, de A et B comme pôles, une infinité de petits cercles sur la surface de la sphère; nous découpons ainsi la surface de la sphère en une infinité de zones infiniment étroites. Projetons la figure sur un plan passant par OM que nous prendrons

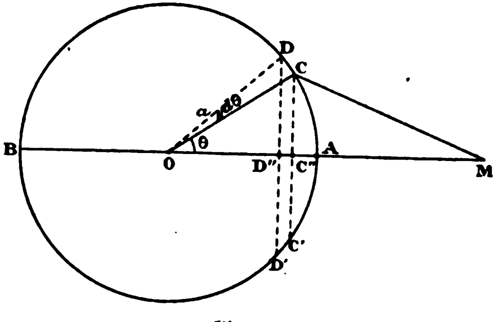


Fig. 6.

pour plan de la figure (fig. 6). Soient CC′ et DD′ les plans de base de l'une des zones; C″D″ est sa hauteur.

L'aire $d\omega'$ de cette zone est donnée par :

$$d\omega' = 2\pi a . C''D'' = 2\pi a . a \sin\theta \, d\theta = 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta.$$

La densité de la matière attirante étant égale à l'unité, $2\pi a^2 \sin\theta d\theta$ représente aussi la masse répandue sur la zone et le potentiel auquel elle donne lieu en M est :

$$\frac{2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta}{r}.$$

Le potentiel V de la surface sphérique est donc :

(6) $$V = \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 \sin\theta}{r} d\theta.$$

C'est une première modification de l'intégrale (5). Transformons-la encore ; on a :

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta,$$

d'où :

$$rdr = a\rho\sin\theta d\theta,$$

et

$$\frac{\sin\theta d\theta}{r} = \frac{dr}{a\rho},$$

et en portant cette valeur dans l'expression (6) :

$$(7) \qquad V = \int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{2\pi a^2}{a\rho} dr = \frac{2\pi a}{\rho}\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr = \frac{4\pi a^2}{\rho}.$$

Or $4\pi a^2$ est la valeur de la masse totale attirante M ; on peut donc écrire :

$$V = \frac{M}{\rho},$$

comme si la masse entière était condensée au centre.

Si le point M, au lieu d'être extérieur à la sphère comme dans le cas précédent de la figure (6), était intérieur, les limites de l'intégrale (7) seraient $a - \rho$ et $a + \rho$; la valeur du potentiel serait alors :

$$V = \frac{2\pi a}{\rho}\int_{a-\rho}^{a+\rho} dr = 4\pi a = \frac{4\pi a^2}{a} = \frac{M}{a}.$$

Ainsi, à l'intérieur de la sphère, le potentiel est constant et égal à $\frac{M}{a}$; l'attraction est nulle.

10. Potentiel d'une sphère pleine. — Commençons par calculer le potentiel d'une couche sphérique homogène infiniment mince.

Soit (fig. 7) une sphère de rayon a recouverte d'une couche de matière attirante dont la densité, constante, est égale à μ' et dont l'épaisseur est uniforme, très petite et égale à ε. Un élément P de la sphère, dont l'aire est $d\omega'$, porte une quantité

de matière égale à $\varepsilon\mu' d\omega'$. Son potentiel en un point M extérieur est :

$$\frac{\mu' \varepsilon d\omega'}{r}.$$

Le potentiel V de la couche est donc :

$$V = \int \mu' \varepsilon \frac{d\omega'}{r} = \varepsilon\mu' \int \frac{d\omega'}{r} = \frac{\mu' \varepsilon . 4 \pi a^2}{\rho};$$

le calcul est le même que pour une surface attirante dont la den-

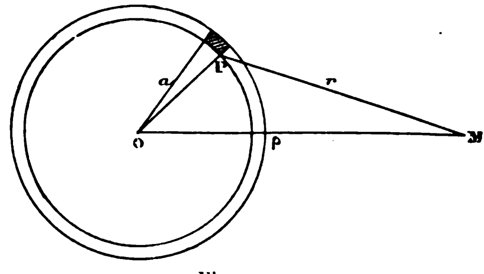


Fig. 7.

sité serait $\varepsilon\mu'$; $4\pi a^2 \varepsilon\mu'$ n'est autre que la masse totale M de la couche et l'on a :

$$V = \frac{M}{\rho};$$

La dérivée fournit la valeur de l'attraction : $-\frac{M}{\rho^2}$,

Pareillement, le potentiel en un point intérieur est constant et égal à :

$$V = \frac{M}{a};$$

le potentiel étant constant à l'intérieur, l'attraction est nulle.

On en conclut sans peine la valeur du potentiel d'une sphère pleine composée de couches concentriques homogènes. En un point extérieur, on a encore :

$$V = \frac{M}{\rho}.$$

Tout se passe comme si la masse totale était condensée au centre de la sphère.

Considérons maintenant une masse attirante comprise entre deux sphères concentriques dont les rayons a et b ont une différence finie (fig. 8), et supposons la matière distribuée en couches concentriques homogènes. A l'extérieur de la grande sphère, le potentiel est encore égal à

$$\frac{M}{\rho},$$

ρ étant la distance au centre du point où l'on évalue le potentiel.

Dans la cavité, au contraire, le potentiel de chaque couche est constant, il en est donc de même pour le potentiel de la masse

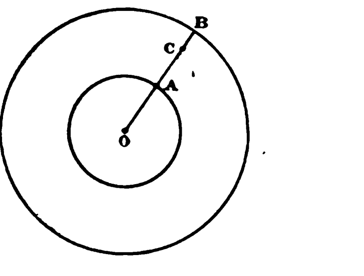


Fig. 8.

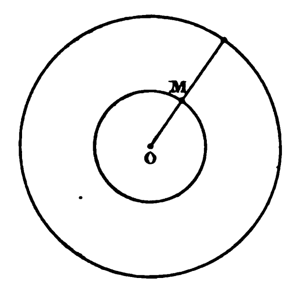


Fig. 9.

totale. Evaluons-le au centre. Le potentiel en ce point, d'une couche de rayon $OC = c$ et d'épaisseur dc, est :

$$\mu . 4\pi c dc.$$

Le potentiel total est donc :

$$V = 4\pi\mu \int_a^b c dc = 2\pi\mu (b^2 - a^2).$$

L'attraction est nulle en tout point de la cavité, puisque le potentiel est constant.

Il nous reste à calculer maintenant l'attraction et le potentiel d'une sphère pleine homogène en un point M intérieur à la sphère. Ici, le point attiré est intérieur aux masses agissantes; nous n'avons encore traité aucun cas de ce genre, mais les considérations qui précèdent vont nous en donner immédiatement

la solution. Traçons (fig. 9) la sphère concentrique à la sphère donnée et de rayon OM.

Le potentiel V en M se compose de deux parties :

1° Le potentiel V_1 de la sphère de rayon $OM = b$;

2° Le potentiel V_2 de la masse comprise entre les deux sphères Le point M peut être considéré comme extérieur à la sphère OM; on a donc :

$$V_1 = \frac{M}{b},$$

M étant la masse de cette sphère.

D'ailleurs, cette sphère étant enlevée, M peut être considéré comme intérieur à la cavité et, par suite, le potentiel V_2 de la masse restante est égal, d'après le calcul effectué plus haut, à :

$$V_2 = 2\pi\mu(a^2 - b^2).$$

On a donc :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{M}{b} + 2\pi\mu(a^2 - b^2);$$

mais M a pour valeur $\frac{4}{3}\pi\mu b^3$; donc :

$$V = \frac{4}{3}\pi\mu b^2 + 2\pi\mu(a^2 - b^2) = 2\pi\mu\left(a^2 - \frac{b^2}{3}\right).$$

Calculons maintenant l'attraction en M : cette attraction se compose de deux parties : 1° celle qu'exerce la sphère de rayon b et dont la valeur est :

$$\frac{M}{b^2}.$$

2° l'attraction exercée par la masse restante, cette dernière est nulle, puisque M se trouve dans la cavité déterminée par l'enlèvement de la sphère OM. $\frac{M}{b^2}$ est donc la valeur de l'attraction exercée en M par la masse totale. Cette valeur est proportionnelle à b.

11. — On peut obtenir tous ces résultats par une autre mé-

thode, que nous allons exposer dans le cas d'une surface sphérique homogène.

Commençons par effectuer le calcul pour un point situé à l'intérieur de la cavité sphérique. Tout point de cette cavité est *extérieur* aux masses agissantes et le potentiel V y satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0. \tag{1}$$

Or, en vertu de l'homogénéité de la couche superficielle, V dépend seulement de ρ, distance du point attiré M au centre O de la sphère; cela nous permet de transformer l'équation (1).

On peut écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho}\frac{x}{\rho},$$

car le centre de la sphère étant pris pour origine des coordonnées, on a :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}.$$

On a de même :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{d\rho}\frac{y}{\rho}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{d\rho}\frac{z}{\rho}.$$

Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dV}{d\rho}\right)\frac{x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right)\frac{dV}{d\rho}$$
$$= \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right].$$

De même :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right],$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\right].$$

thode, que nous allons exposer dans le cas d'une surface sphérique homogène.

Commençons par effectuer le calcul pour un point situé à l'intérieur de la cavité sphérique. Tout point de cette cavité est *extérieur* aux masses agissantes et le potentiel V y satisfait à l'équation de Laplace

$$(1) \qquad \Delta V = 0.$$

Or, en vertu de l'homogénéité de la couche superficielle, V dépend seulement de ρ, distance du point attiré M au centre O de la sphère; cela nous permet de transformer l'équation (1).

On peut écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho}\frac{x}{\rho},$$

car le centre de la sphère étant pris pour origine des coordonnées, on a :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}.$$

On a de même :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{d\rho}\frac{y}{\rho}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{d\rho}\frac{z}{\rho}.$$

Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dV}{d\rho}\right)\frac{x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right)\frac{dV}{d\rho}$$
$$= \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right].$$

De même :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right],$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2}\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\right].$$

Ajoutons ces trois dernières relations, membre à membre; il vient :

$$\Delta V = \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dV}{d\rho}.$$

L'équation (1) devient donc :

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dV}{d\rho} = 0.$$

Nous avons remplacé l'équation aux dérivées partielles par une équation différentielle linéaire du second ordre. Or nous connaissons deux intégrales particulières de cette équation; ce sont :

$$V = 1 \qquad \text{et} \qquad V = \frac{1}{\rho}.$$

L'intégrale générale est donc :

$$(3) \qquad V = A + \frac{B}{\rho},$$

A et B étant des constantes.

Calculons A et B.

Au centre, le potentiel doit être égal à $\frac{M}{a}$, car, dans l'intégrale $\int \mu' \frac{d\omega'}{r}$, r est égal à a, rayon du cercle. Donc, pour $\rho = 0$, V doit se réduire à $\frac{M}{a}$, ce qui exige que l'on ait :

$$A = \frac{M}{a}, \quad B = 0,$$

et ce qui nous montre que le potentiel est constant en tout point intérieur et égal à $\frac{M}{a}$.

Voyons ce qui se passe pour un point extérieur à la sphère. En tout point extérieur, l'équation (2) est vérifiée et le potentiel est encore de la forme (3), les constantes A et B n'ayant pas la même valeur que dans le cas précédent. Calculons ces nouvelles valeurs; pour cela, remarquons que, si ρ augmente indéfiniment, on a :

$$\text{Lim } \rho V = M,$$

ce qui exige que l'on ait :

$$A = 0$$
$$B = M$$

et, par suite,

$$V = \frac{M}{\rho}.$$

12. Potentiel logarithmique d'une circonférence. — Soit une circonférence attirante homogène, dont le centre est à l'origine des coordonnées. Proposons-nous de calculer le potentiel logarithmique V en un point M de son plan. Remarquons que V est une fonction de deux variables seulement, x et y, et qu'à l'intérieur comme à l'extérieur de la circonférence, cette fonction satisfait à l'équation de Laplace :

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, la circonférence étant homogène, V ne dépend que de la distance ρ du point attirant au centre. Nous pouvons alors transformer l'équation aux dérivées partielles (4) en une équation différentielle linéaire et du second ordre. On a en effet :

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho}\frac{x}{\rho},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{d\rho}\frac{y}{\rho},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dV}{d\rho}\frac{x}{\rho}\right) = \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dV}{d\rho}\right) + \frac{dV}{d\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right)$$
$$= \frac{x^2}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{y^2}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right),$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho}$$

l'équation différentielle cherchée est donc :

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho} = 0.$$

On connait deux solutions particulières de cette équation :

$$V = 1$$
$$V = \log \rho.$$

L'intégrale générale est donc de la forme :

$$(5) \qquad V = A - B.\log \frac{r_0}{\rho}.$$

qui est une combinaison linéaire des deux précédentes.

Calculons A et B pour un point intérieur.

Au centre, le potentiel est :

$$\int \log \frac{r_0}{a}\mu\, d\omega = M.\log \frac{r_0}{a},$$

a étant le rayon de la circonférence. L'expression (5) doit donc se réduire à $M \log \frac{r_0}{a}$. pour $\rho = 0$. Ce qui exige que l'on ait :

$$A = M.\log \frac{r_0}{a}$$
$$B = 0.$$

Le potentiel est donc constant en tout point intérieur et a pour valeur :

$$V = M \log \frac{r_0}{a}.$$

M a toujours la même signification : c'est la masse totale de la circonférence.

Passons au cas d'un point extérieur au cercle; nous nous appuierons, pour traiter ce cas, sur une propriété démontrée au paragraphe (8) : quand ρ augmente indéfiniment, on a :

$$\text{Lim}\left(V - M \log \frac{r_0}{\rho}\right) = 0.$$

Donc, quand, dans la formule (5), on fait augmenter ρ indéfiniment, V doit se réduire à

$$M \log \frac{r_0}{\rho},$$

ce qui exige que l'on ait :

$$A = 0,$$
$$B = M,$$

et donne pour la valeur du potentiel :

$$V = M \log \frac{r_0}{\rho}.$$

Tout se passe comme si la masse totale était concentrée au centre du cercle.

13. — Indiquons encore une troisième méthode pour obtenir le potentiel newtonien d'une sphère et le potentiel logarithmique d'une circonférence.

Cette méthode repose sur la propriété suivante :

Soient une sphère de centre O (fig. 10), M un point qui n'est pas sur la sphère, AB le diamètre issu de M, enfin M′ le point qui sur AB est conjugué harmonique de M par rapport à A et B. Si M est extérieur, M′ est intérieur, et réciproquement; de plus, si l'on pose :

$$PM = r, \qquad PM' = r',$$

P étant un point quelconque de la surface de la sphère, les triangles semblables OPM et OPM′ donnent la relation :

$$\frac{r}{r'} = \text{const.} = \frac{\rho}{a},$$

quand le point P se déplace sur la sphère.

Cette propriété est vraie également de la circonférence de cercle.

Cela posé, proposons-nous de calculer le potentiel newtonien d'une surface sphérique homogène.

Supposons qu'on connaisse la valeur constante

$$\frac{M}{a}$$

du potentiel à l'intérieur; on peut en déduire l'expression du potentiel en un point extérieur quelconque M. Soient, en effet, V le

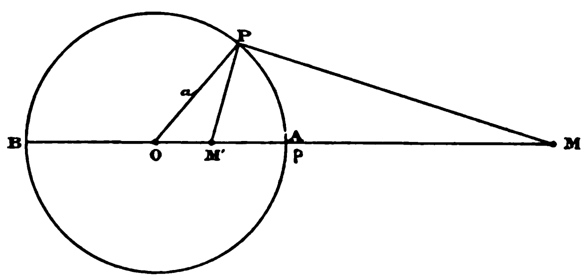


Fig. 10.

potentiel cherché en M et V' le potentiel au point M' conjugué de M; on a :

$$V=\int\frac{d\omega}{r},\qquad V'=\int\frac{d\omega}{r'},$$

d'où :

$$(6)\qquad \frac{V}{V'}=\frac{r'}{r}=\frac{a}{\rho}.$$

Or M' est intérieur, donc $V'=\frac{M}{a}$; la relation (6) donne V :

$$V=V'\frac{a}{\rho}=\frac{M}{a}\frac{a}{\rho}=\frac{M}{\rho}.$$

Inversement : connaissant le potentiel à l'extérieur, on en déduit le potentiel à l'intérieur.

Par le même procédé, on peut trouver le potentiel logarithmique d'une circonférence en un point extérieur, quand on le connaît à l'intérieur du cercle. Soit, en effet, M le point extérieur où l'on veut calculer le potentiel V; soient M' le conjugué de M et V' le potentiel en M'; on a :

$$V=\int\log\frac{r_0}{r}\,ds',\qquad V'=\int\log\frac{r_0}{r'}\,ds',$$

ds' étant l'élément d'arc de la circonférence dont la densité est supposée égale à l'unité. On a :

$$V - V' = \int \log \frac{r'}{r} ds' = \int \log \frac{a}{\rho} ds'$$
$$= M \log \frac{a}{\rho}.$$

Or :

$$V' = M \log \frac{r_0}{a};$$

donc :

$$V = M \log \frac{r_0}{\rho}.$$

14. Attraction d'une droite homogène sur un point extérieur. — Soit une droite attirante AB, homogène, de densité μ' (fig. 11). Supposons d'abord cette droite limitée aux points A et B et proposons-nous de calculer le potentiel newtonien de cette droite en un point M extérieur.

Prenons la droite AB pour axe des z et choisissons l'origine O entre les points A et B. Soient Q la projection du point M sur la droite, P un élément de longueur de celle-ci, ds' la longueur de cet élément; enfin appelons x, y, z les coordonnées du point M, x', y', z' celles du point P, et r la distance MP. On a :

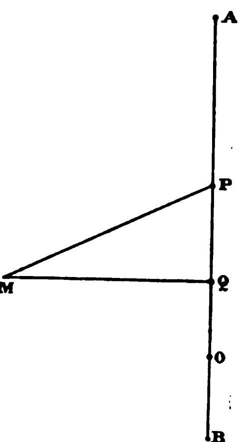


Fig. 11.

$$x' = 0, \qquad y' = 0, \qquad ds' = dz',$$
$$MQ = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\overline{QP} = z' - z,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z' - z)^2}.$$

Posons en outre :

$$MQ = \rho,$$
$$OA = a,$$
$$OB = -b;$$

a et b sont des quantités positives si la direction de l'axe des z est celle du segment BA.

Le potentiel en M a pour expression :

$$V = \int_{-a}^{+b} \frac{\mu' dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} = \int_{-a}^{+b} \frac{\mu' dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}.$$

La valeur de l'intégrale indéfinie est :

$$\mu' \log \left(z'-z+\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right).$$
$$= \mu' \log (\overline{QP}+MP).$$

Remarquons que MP est essentiellement positif au lieu que PQ est doué de signe.

L'intégrale définie V a pour valeur :

$$V = \mu' . \log \frac{QA+MA}{QB+MB}.$$

ce qui peut s'écrire :

$$V = \mu' . \log \frac{MA+QA}{MB-BQ} = \mu' . \log \frac{(QA+MA)(MB+BQ)}{\overline{MB}^2-\overline{BQ}^2}$$
$$= \mu' \log (QA+MA) + \mu' \log (MB+BQ) - \mu' \log \left[\overline{MB}^2 - \overline{BQ}^2\right]$$
$$= \mu' \log (QA+MA) + \mu' \log (MB+BQ) - \mu' \log \overline{MQ}^2.$$

Supposons la droite très longue, c'est-à-dire a et b très grands, mais x, y, z finis. Nous pourrons négliger des quotients tels que :

$$\frac{x}{a}, \qquad \frac{x}{b}, \qquad \frac{y}{a}, \ldots \text{etc.}$$

La somme QA+MA est alors très voisine de 2a ; en effet :

$$QA + MA = 2\,OA + (MA - OA) + (QA - OA).$$

Il suffit de montrer que l'erreur relative commise en négligeant les différences (MA—OA) et (QA—OA) est très petite. Voyons d'abord la seconde différence QA—OA ; on a :

$$QA - OA = - OQ\ ;$$

l'erreur relative commise en la négligeant est :

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{z}{a},$$

qui est négligeable en vertu de la remarque précédente. Voyons maintenant la deuxième différence MA—OA. Le triangle MQA donne :

$$MA < MQ + QA,$$

donc :

$$| MA - OA | < | MQ + QA - OA | ,$$

ou :

$$| MA - OA | < | MQ - OQ | ;$$

l'erreur relative est donc négligeable, puisque MQ et OQ sont finis et de l'ordre de x, y, z.

Bref, la somme QA+MA est très voisine de 2a; la somme QB+MB est de même très voisine de 2b. On peut donc écrire :

$$(1) \qquad V = \mu' [\log 2a + \log 2b - 2 \log \rho]$$

$$= \mu' [\log 4ab - 2 \log \rho]$$

$$= 2\mu' \log \frac{2\sqrt{ab}}{\rho} = 2\mu' \log \frac{r_0}{\rho} = \frac{2M}{a+b} \log \frac{r_0}{\rho}$$

en posant :

$$r_0 = \sqrt{ab}.$$

Quant à l'attraction, elle a pour expression $\frac{2M}{a+b}\frac{1}{\rho}$.

Ainsi le potentiel newtonien d'une droite très longue est le même que le potentiel logarithmique d'un point situé en Q. Cela cesse d'être vrai si le point M s'éloigne indéfiniment, car dans ce cas on ne peut plus négliger les quotients $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$,... etc. Cela explique un paradoxe : un potentiel newtonien identique à un potentiel logarithmique semble un résultat contradictoire, car à l'infini le premier s'annule, tandis que le second est infini. Dans l'exemple précédent, nous avons vu que cette identité n'a

lieu que pour des points situés à une petite distance de la droite attirante, distance négligeable devant leurs distances aux extrémités de la droite.

Remarquons encore que l'expression de V ne dépend que de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et non de z : cela veut dire que, quand z varie seul, V varie très lentement : il faut se souvenir, en effet, que la formule 1 n'est qu'approximative.

Faisons une dernière remarque ; nous avons trouvé

$$r_0 = 2\sqrt{ab};$$

il semble que V dépende du choix de l'origine ; mais, si l'on prend deux origines O et O' à distance finie l'une de l'autre, l'expression de V change très peu.

15. Potentiel newtonien d'un cylindre. — Soit (fig. 12) un cylindre dont la section droite est une courbe quelconque. Prenons l'axe des z parallèle aux génératrices. Supposons ce cylindre rempli de matière attirante et limité à deux sections droites dont les cotes sont :

$$z' = a,$$
$$z' = -b.$$

Proposons-nous de calculer le potentiel newtonien de ce cylindre en un point M dont la distance au cylindre est négligeable devant a et b ; nous effectuerons le calcul dans l'hypothèse où la densité μ' de la matière attirante en un point Q dépend seulement des deux premières coordonnées x' et y' de Q et non de la troisième coordonnée z'.

Traçons la section droite S qui passe par M et décomposons l'aire S en éléments $d\omega'$, puis découpons le cylindre en une infinité de cylindres élémentaires parallèles à OZ ayant respectivement pour bases les éléments $d\omega'$ de S.

Un cylindre élémentaire est assimilable à une droite attirante dont la densité linéaire serait $\mu' d\omega'$; soit C l'un des cylindres ; il perce la section S en Q ; son potentiel en M est :

$$2\,\mu' d\omega' . \log \frac{r_0}{r},$$

en posant MQ = r (voir § 14) et $r_0 = 2\sqrt{ab}$.

Le potentiel du cylindre total en M est donc :

$$V = \int 2\,\mu' d\omega' . \log \frac{r_0}{r},$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la section droite S. Le calcul du potentiel newtonien cherché est donc ramené à celui du potentiel logarithmique de la section droite qui passe par M. On ramène de même le potentiel newtonien d'une surface cylindrique au potentiel logarithmique du contour de la section droite.

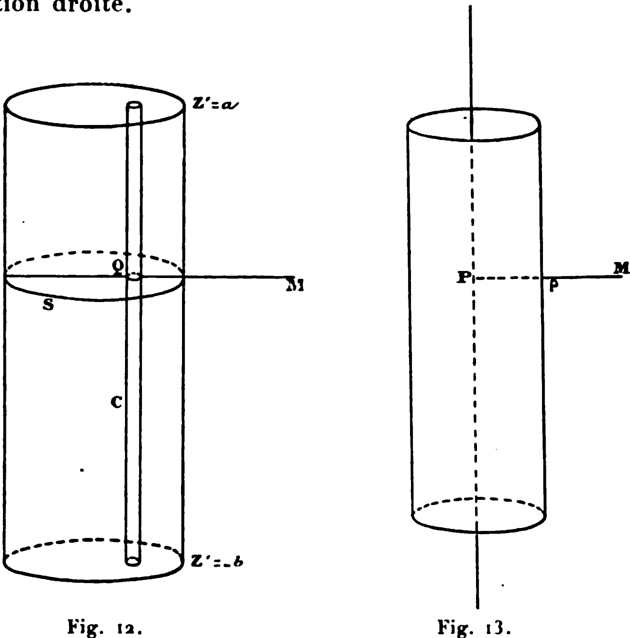


Fig. 12. Fig. 13.

16. Cas du cylindre de révolution. — 1° *Surface cylindrique.* — Les considérations précédentes nous permettent de calculer le potentiel newtonien d'une surface cylindrique (fig. 13) homogène de révolution. Ce potentiel se ramène au potentiel logarithmique de la section droite qui passe par le point attiré M, c'est-à-dire au potentiel logarithmique d'une circonférence. On voit sans peine que le potentiel newtonien cherché est :

$$V = 2\mu' \int ds' . \log \frac{r_0}{\rho},$$

ρ désignant la distance du point M à l'axe et r_1 ayant la signification habituelle $2\sqrt{ab}$. On peut donc écrire :

$$V = 2 \log \frac{r_1}{\rho} \int \mu \, ds ;$$

dans ces deux expressions, ds est l'élément d'arc de la circonférence. Si L est la longueur de la circonférence, M la masse totale de la surface cylindrique, a et — b les cotes des bases, on a :

$$\mu = \frac{M}{S} = \frac{M}{L(a-b)}.$$

d'où :

$$\int \mu \, ds = \mu \int ds = \mu . L = \frac{M}{a-b} ;$$

donc on a :

$$V = 2 \log \frac{r_1}{\rho} . \frac{M}{a-b} ;$$

on en conclut sans peine l'attraction en prenant la dérivée. Tout se passe comme si la masse attirante était concentrée sur l'axe du cylindre. On voit de même sans difficulté qu'à l'intérieur le potentiel est constant et égal à :

$$V = 2 \log \frac{r_1}{R} . \frac{M}{a-b} .$$

R désignant le rayon de cylindre. Quant à l'attraction, elle est nulle.

Tout cela suppose le cylindre infiniment allongé.

2° *Volume cylindrique.* — Le calcul est encore très simple ; on partage le volume en couches cylindriques très minces, concentriques et assimilables à des surfaces cylindriques attirantes ; on est ainsi ramené au cas précédent.

En un point extérieur l'attraction et le potentiel dépendent de ρ seulement ; ils ont la même valeur que si toute la masse était condensée sur l'axe.

En un point intérieur, les choses se passent différemment ; le résultat se déduit de la considération du cas suivant.

3° *Masse attirante comprise entre deux cylindres concen-*

triques. — Nous supposons que la différence des deux rayons est une quantité finie. En un point M extérieur au plus grand cylindre (fig. 14), le potentiel est, comme l'attraction, une fonction de ρ seulement; tout se passe donc comme si la masse était condensée sur l'axe ; le raisonnement est le même que dans le cas précédent : on décompose la masse attirante en une infinité de couches cylindriques, concentriques, assimilables à des surfaces.

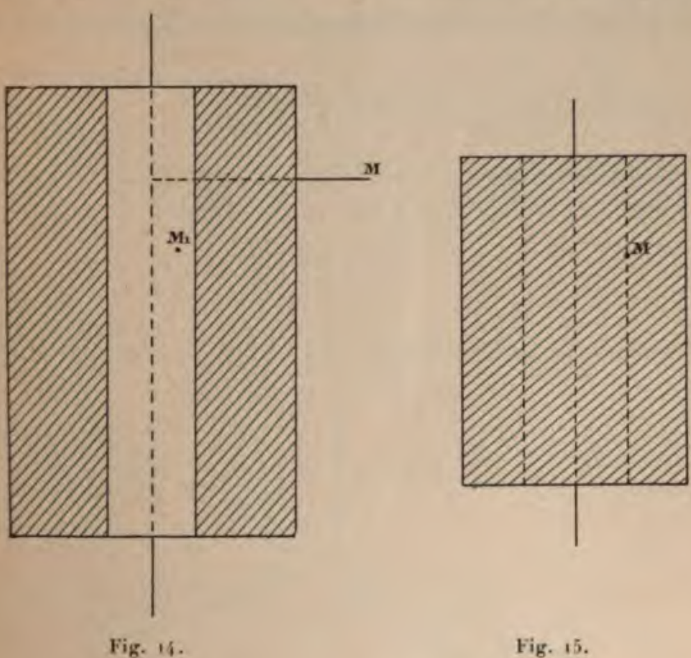


Fig. 14. Fig. 15.

En tout point M_1 intérieur à la cavité, le potentiel est constant et l'attraction nulle, car tous les points M_1 sont intérieurs à toutes les couches cylindriques.

Si donc (fig. 15) nous voulons évaluer le potentiel et l'attraction en un point M intérieur à un cylindre plein, nous décomposerons ce volume en deux parties : 1° un cylindre concentrique au premier et passant par le point M ; 2° le reste du volume, c'est-à-dire la portion comprise entre les deux cylindres. Le potentiel en M est la somme des potentiels de ces deux volumes et l'attraction se réduit à celle du cylindre intérieur. Le raisonnement

est exactement le même que celui que nous avons fait (§ 10) pour une sphère pleine.

17. Potentiel newtonien d'une circonférence. — Proposons-nous de calculer le potentiel newtonien d'une circonférence en un point quelconque M de l'espace.

Représentons (fig. 16) la circonférence C en perspective. Soient OZ l'axe de cette circonférence, P un point de celle-ci, r sa distance au point M, ds′ un élément d'arc de C ; le potentiel V en M est :

$$V = \int \frac{\mu'}{r} ds'.$$

Si nous supposons la circonférence homogène, la densité μ' est constante et l'on peut écrire :

$$V = \mu' \int \frac{ds'}{r}.$$

Projetons en Q le point M sur le plan du cercle et joignons

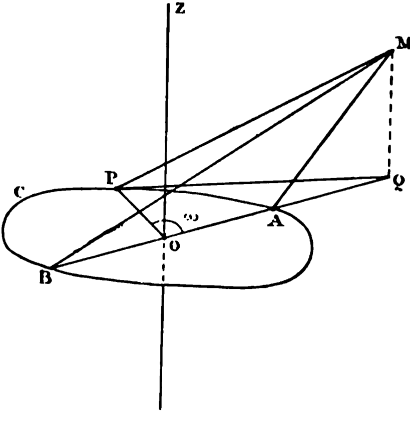


Fig. 16.

OQ, cette droite coupe la circonférence en deux points A et B ; enfin menons les droites MA et MB et posons :

$$OP = a; \qquad OQ = \rho; \qquad MP = r; \qquad QM = z;$$

et appelons ω l'angle POQ (fig. 16).

On a

$$ds' = a d\omega,$$
$$\overline{MA}^2 = z^2 + (a - \rho)^2,$$
$$\overline{MB}^2 = z^2 + (a + \rho)^2,$$
$$\overline{PQ}^2 = a^2 + \rho^2 - 2 a\rho \cos \omega,$$
$$r^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{PQ}^2 = z^2 + a^2 + \rho^2 - 2 a\rho \cos \omega.$$

r^2 peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$r^2 = \left(z^2 + a^2 + \rho^2\right)\left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2}\right) - 2 a\rho\left(\cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \left[z^2 + (a - \rho)^2\right]\cos^2 \frac{\omega}{2} + \left[z^2 + (a + \rho)^2\right] \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$
$$= \overline{MA}^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + \overline{MB}^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Le potentiel prend donc la forme :

$$V = \mu' \int_0^{2\pi} \frac{a d\omega}{\sqrt{\overline{MA}^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + \overline{MB}^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}}.$$

Or, si l'on désigne par M la masse attirante totale, on a :

$$M = 2 \pi a \mu';$$

donc :

$$\frac{V}{M} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2 \pi \sqrt{\overline{MA}^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + \overline{MB}^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}}.$$

On peut donc poser,

$$V = \varphi(MA, MB),$$

et si l'on pose en outre :

$$\frac{\omega}{2} = \Psi,$$

on peut écrire :

$$\varphi(MA, MB) = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\Psi}{2 \pi \sqrt{\overline{MA}^2 \cos^2 \Psi + \overline{MB}^2 \sin^2 \Psi}}.$$

Enfin remarquons que la fonction sous le signe $\int$ est une fonction périodique et que l'on a, par suite,

$$\int_0^{\pi} = \int_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}$$

La fonction $\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MB})$ prend la forme suivante :

$$\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{2\pi\sqrt{\overline{\mathrm{MA}}^2\cos^2\Psi + \overline{\mathrm{MB}}^2\sin^2\Psi}}.$$

C'est cette intégrale qu'il s'agit de calculer ; nous y parviendrons en démontrant trois propriétés importantes de la fonction φ.

1° La valeur de cette fonction ne change pas quand on permute entre elles les valeurs de MA et MB. On le voit, en changeant Ψ en $\Psi - \frac{\pi}{2}$ et en remarquant que :

$$\int_0^{2\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}};$$

on a donc :

$$\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) = \varphi(\mathrm{MB}, \mathrm{MA}).$$

2° Supposons $\mathrm{MB} = \mathrm{MA}$; on a :

$$\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MA}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{2\pi \mathrm{MA}} = \frac{1}{\mathrm{MA}}\int_0^{2\pi}\frac{d\Psi}{2\pi} = \frac{1}{\mathrm{MA}}.$$

3° $\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MB})$ est homogène en MA et MB et de degré -1. L'expression :

$$\mathrm{MA}\,\varphi(\mathrm{MA}, \mathrm{MB})$$

est donc homogène et de degré 0 et, par suite, ne dépend que du rapport $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}$.

Soient alors (fig. 17) deux points R et R′, situés sur AB et conjugués harmoniques par rapport à A et B; traçons, sur RR′ comme diamètre, la circonférence C_1 dont le plan est perpendi-

culaire sur celui de C. Pour tous les points M de C_1, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est le même et l'expression

$$MA\,\varphi\,(MA, MB),$$

a la même valeur qu'au point R'. On peut donc, du potentiel en R', conclure le potentiel en un point quelconque de C_1 et, par

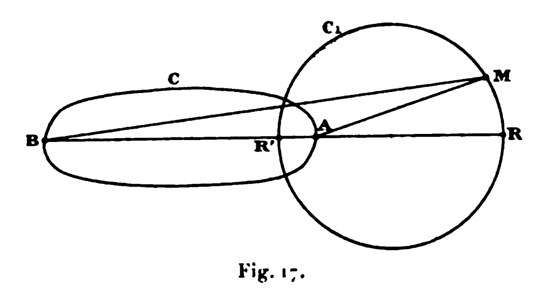


Fig. 17.

conséquent, si l'on connaît le potentiel en tous les points du plan du cercle C qui sont intérieurs à sa circonférence, on connaîtra sans peine le potentiel en un point quelconque de l'espace.

18. — Toute la question est donc ramenée au calcul du potentiel en un point situé dans le plan du cercle C à l'intérieur de sa circonférence.

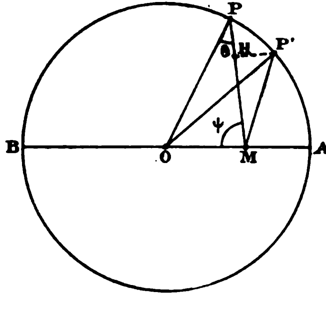


Fig. 18.

Prenons ce plan comme plan de la figure (fig. 18). Soit M un point intérieur quelconque ; menons le diamètre AB passant par

ce point. Soit, en outre, P un point de la circonférence et P′ un point infiniment voisin. Posons :

$$OM = \rho. \qquad PM = r. \qquad PP' = ds'.$$

$$OA = OB = OP = OP' = a, \quad \text{angle } MPO = \theta,$$

$$\text{angle } PMO = \Psi. \qquad \text{angle } P'MP = d\Psi.$$

Enfin, prenons pour unité de masse la masse totale M. On aura :

$$M = 1 \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{1}{2\pi a}.$$

Projetons le point P′ sur MP en H ; on a :

$$PH = PP' \cos \widehat{PP'H} = ds' \cos \theta.$$

Mais on a aussi :

$$P'H = P'M \sin(d\Psi) = r d\Psi$$

On en conclut :

$$r d\Psi = ds' \cos \theta.$$

Le potentiel V, qui a pour expression $\int \frac{\mu' ds'}{r}$, peut donc s'écrire :

$$V = \mu' \int \frac{d\Psi}{\cos \theta}.$$

Le triangle OPM donne d'ailleurs la relation :

$$\sin \theta = \frac{\rho}{a} \sin \Psi ;$$

d'où :

$$a \cos \theta = \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \Psi}.$$

Le potentiel V prend la forme suivante :

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{2\pi \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \Psi}},$$

qu'on peut écrire :

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{2\pi\sqrt{a^2(\sin^2\Psi + \cos^2\Psi) - \rho^2 \sin^2\Psi}},$$

ou enfin :

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{2\pi\sqrt{a^2\cos^2\Psi + (a^2 - \rho^2)\sin^2\Psi}}.$$

On peut donc poser, en se souvenant de la définition de la fonction φ :

$$V = \varphi\left[a, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right].$$

Or, on a vu que :

$$V = \varphi(MA, MB) = \varphi(a - \rho, a + \rho).$$

Donc :

$$\varphi(a - \rho, a + \rho) = \varphi\left[a, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right].$$

Remarquons que a est la moyenne arithmétique des deux quantités $a - \rho$ et $a + \rho$ et que $\sqrt{a^2 - \rho^2}$ en est la moyenne géométrique ; on peut donc écrire en général :

$$\varphi(a, b) = \varphi(a_1, b_1) = \varphi(a_2, b_2) = \ldots \text{etc.}$$

en posant :

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

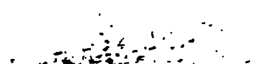
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$\ldots\ldots \text{etc.} \qquad \ldots\ldots \text{etc.}$$

C'est là une propriété fondamentale de la fonction φ.

Remarquons que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique. Or, supposons $a > b$, ce qui est toujours possible, puisqu'on peut intervertir ces deux quantités sans changer la valeur de φ ; nous aurons :

$$a - b > a_1 - b_1 > a_2 - b_2 > \ldots\ldots \text{etc.} ;$$



il vient :

$$\int U_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} d\tau = \int \alpha U_1 \frac{\partial V}{dx} d\omega - \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{dx} d\tau.$$

Les deux autres formules (1) nous donnent de même :

$$\int U_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} d\tau = \int \beta U_1 \frac{\partial V}{\partial y} d\omega - \int \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} d\tau,$$

$$\int U_1 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} d\tau = \int \gamma U_1 \frac{\partial V}{\partial z} d\omega - \int \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_1}{dz} d\tau.$$

Ajoutons membre à membre ces trois dernières relations :

$$\int U_1 \Delta V d\tau = \int U_1 \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega$$

$$- \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) d\tau.$$

Si l'on pose pour abréger :

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dn}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_1}{\partial z} = \sum \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} d\tau,$$

on aura :

$$\int U_1 \Delta V d\tau = \int U_1 \frac{dV}{dn} d\omega - \int \sum \frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau,$$

formule bien connue sous le nom de *formule de Green*.

On la met souvent sous une forme plus symétrique ; on a, en effaçant les indices :

$$\int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int U \frac{dV}{dn} d\omega - \int U \Delta V d\tau ;$$

mais, en vertu de la symétrie des termes sous le signe $\int$ dans le premier membre, on a également :

$$\int \sum \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = \int V \frac{dU}{dn} d\omega - \int V \Delta U d\tau.$$

Retranchons membre à membre ces deux dernières relations :

$$\int (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau = \int \left(U\, \frac{dV}{dn} - V\, \frac{dU}{dn}\right) d\omega.$$

Les fonctions U et V doivent être finies, continues et admettre des dérivées premières continues et également finies. Elles doivent avoir, en outre, des dérivées secondes finies et intégrables ; les discontinuités de ces dérivées, s'il y en a, doivent se trouver sur une surface algébrique.

Les théorèmes sont encore vrais pour des aires planes limitées par des contours fermés. On les exprime de même, en remplaçant les éléments de volume $d\tau$ par des éléments de surface et les éléments de surface $d\omega$ par des éléments du contour envisagé ; les intégrales triples deviennent doubles ; les doubles deviennent simples.

20. — Replaçons-nous dans l'espace à trois dimensions et faisons $U=1$ dans la formule de Green ; elle deviendra :

$$\int \Delta V d\tau = \int \frac{dV}{dn}\, d\omega.$$

Faisons maintenant $U=V$, au lieu de $U=1$; la formule de Green donnera :

$$\int U\Delta U d\tau = \int U\, \frac{dU}{dn}\, d\omega - \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Si, en outre, U satisfait à l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, on obtiendra finalement :

$$\int U\, \frac{dU}{dn}\, d\omega = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

ce qui nous montre que l'intégrale $\int U \frac{dU}{dn} d\omega$ est positive. Ces formules seront utilisées dans la suite.

Tous les théorèmes que nous venons de démontrer s'appliquent à des volumes connexes, quel que soit leur ordre de con-



Je suppose l'origine des coordonnées *extérieure* à ces masses ; on peut donc tracer, autour de l'origine prise comme centre, une sphère Σ tout entière extérieure aux masses agissantes. Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

En tout point situé à l'intérieur de la sphère Σ, la fonction V est développable en série de polynomes homogènes en x, y, z.

Cette démonstration repose sur le développement de l'expression

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2}},$$

suivant les puissances croissantes de ρ. Commençons donc par effectuer ce développement.

Il sera de la forme :

$$(1) \qquad A = \Sigma P_n \rho^n.$$

Or, on a :

$$1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2 = (1 - \rho e^{i\gamma})(1 - \rho e^{-i\gamma}),$$

d'où :

$$A = (1 - \rho e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}}(1 - \rho e^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus on a, si $|\rho|$ est inférieur à 1 :

$$(2) \qquad (1-\rho)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\rho + \frac{1.3}{2.4}\rho^2 + \ldots\ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\rho^n + \ldots\ldots$$

Tous les coefficients de ce développement sont réels et positifs. On a en outre :

$$(1 - \rho e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\rho e^{i\gamma} + \ldots\ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\rho^n e^{ni\gamma} + \ldots\ldots$$

$$(1 - \rho e^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\rho e^{-i\gamma} + \ldots\ldots + \frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n}\rho^n e^{-ni\gamma} + \ldots\ldots$$

Ces développements résultent du développement (2), car, si $|\rho|$ est égal à 1, $|\rho e^{i\gamma}|$ est aussi égal à 1. De plus, ces trois séries

sont absolument convergentes ; on peut multiplier les deux dernières membre à membre et écrire

$$(1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \alpha_p \alpha_n e^{i\gamma(n-p)} \rho^{n+p},$$

en posant

$$\alpha_p = \frac{1.3.....(2p-1)}{2.4.....2p}. \tag{3}$$

Comparons les formules (1) et (3); ou en tire :

$$P_{n+p} = \sum \alpha_n \alpha_p e^{i\gamma(n-p)}.$$

le signe Σ portant sur l'ensemble des termes pour lesquels la somme $n+p$ a la même valeur.

Les α étant réels et positifs, le maximum de P_{n+p} a lieu pour $\gamma = 0$; on en conclut :

$$\left| P_{n+p} \right| \leq \sum \alpha_n \alpha_p.$$

Or faisons $\gamma = 0$ dans l'expression de A ; il vient :

$$A = \frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ... + \rho^n + ...$$

On a donc :

$$\sum \alpha_n \alpha_p = 1,$$

le signe Σ portant comme plus haut sur l'ensemble des termes tels que $n + p = C^{te}$. Bref on a :

$$\left| P_n \right| \leq 1,$$

l'égalité ayant lieu pour $\gamma = 0$.

Cela posé, supposons $\rho > 0$; la série

$$\sum P_n \rho^n,$$

est convergente pour $|\rho| < 1$. Calculons l'erreur commise quand on arrête le développement au $(n+1)^e$ terme ; posons :

$$A = P_0 + P_1\rho + P_2\rho^2 + \ldots + P_n\rho^n + R_n;$$

l'erreur cherchée est moindre que $|R_n|$; or :

$$|R_n| < \rho^{n+1} + \rho^{n+2} + \ldots,$$

c'est-à-dire :

$$\left|R_n\right| < \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}.$$

Les coefficients P sont des polynomes entiers en $\cos\gamma$; leur degré est égal à leur indice ; P_n est de degré n. Ces polynomes sont connus sous le nom de *polynomes de Legendre.*

Les polynomes de Legendre sont alternativement pairs et impairs en $\cos\gamma$. Pour le voir, il suffit de changer, dans A, γ en $\gamma + \pi$ et ρ en $-\rho$; A ne change pas et, par suite, un terme

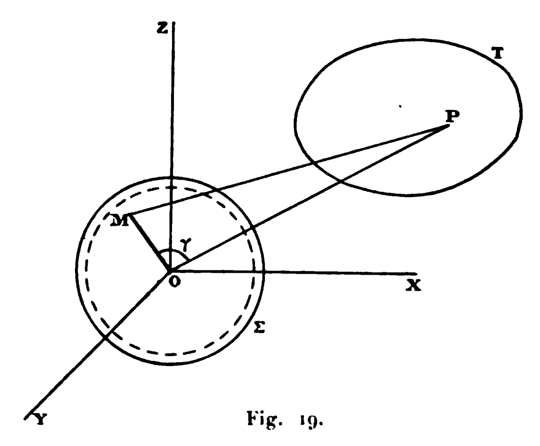


Fig. 19.

quelconque $P_n\rho^n$ de la série reste le même ; donc P_n ne doit pas changer de signe et, par conséquent, doit être pair, si n est pair ; il doit, au contraire, changer de signe, et par suite, être impair en $\cos\gamma$, si n est impair.

23. Développement du potentiel newtonien en série de polynomes sphériques. — Les considérations qui précèdent vont trouver leur application dans l'étude du potentiel newtonien.

Soit T un volume attirant et O l'origine des coordonnées, supposée extérieure à ce volume ; on peut tracer une sphère ayant le point O pour centre et tout entière extérieure à T (fig. 19).

Soient, en outre, P un point attirant quelconque du volume T et M un point situé à l'intérieur de la sphère. Appelons x, y, z les coordonnées rectilignes et ρ, θ, φ les coordonnées polaires de M ; x', y', z' et ρ', θ', φ' les coordonnées rectilignes et les coordonnées polaires de P ; enfin r la distance MP et γ l'angle MOP. On a les relations suivantes :

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma + \rho^2,$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$\rho\rho'\cos\gamma = xx' + yy' + zz'.$$

Le potentiel newtonien V en M a pour expression :

$$V = \int \frac{\mu' d\tau'}{r} ;$$

c'est une fonction des coordonnées ρ, θ et φ de M ; proposons-nous de développer cette fonction suivant les puissances croissantes de ρ ; on a :

$$\frac{1}{r} = (\rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho}{\rho'}\cos\gamma + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}}$$

Reportons-nous au développement du paragraphe précédent ; on peut écrire :

$$(1) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho'} + P_1 \frac{\rho}{\rho'^2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\rho^n}{\rho'^{n+1}} + R_n,$$

et l'on a :

$$\left| R_n \right| < \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)}$$

c'est-à-dire :

$$\left| R_n \right| < \frac{\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n+1}}{\rho' - \rho} .$$

Si a désigne le rayon de la sphère, on peut toujours construire une autre sphère de rayon εa, ε étant < 1, telle que le point M soit à son intérieur. On aura :

$$\rho < \varepsilon a < a < \rho'$$

et, par suite,

$$\left| R_n \right| < \frac{\varepsilon^{n+1}}{(1-\varepsilon) a} .$$

On voit que R_n tend vers 0 quand n augmente indéfiniment quelles que soient les positions du point P à l'intérieur du volume T et du point M à l'intérieur de la sphère de rayon εa. La série (1) est donc uniformément convergente dans ces conditions et l'on peut l'intégrer terme à terme. On a par suite :

$$(2) \qquad V = \int \frac{\mu' d\tau'}{r} = \int \frac{\mu' d\tau'}{\rho'} + \int \frac{\mu' P_1 \rho d\tau'}{\rho'^2} + \ldots\ldots$$
$$+ \int \frac{\mu' P_n \rho^n d\tau'}{\rho'^{n+1}} + \ldots\ldots$$

Considérons $P_n \rho^n$; c'est un polynome entier homogène et de degré n en x, y, z. En effet, d'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, P_n est un polynome entier et de degré n en $\cos\gamma$.

Or on a

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho' \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

de plus, P_{2p} est pair en $\cos\gamma$ et P_{2p+1} est impair; P_{2p} est donc entier et de degré n par rapport à

$$\frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

et $\rho^{2p} P_{2p}$ est entier, homogène et de degré p par rapport à

$(xx'+yy'+zz')^2$ et $x^2+y^2+z^2$ et, par suite, entier, homogène et de degré $2p$ par rapport à x, y, z. Quant à P_{2p+1}, il est entier et de degré $2p+1$ par rapport à :

$$\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

il est donc égal au produit de cette expression par un polynome entier et de degré p par rapport à

$$\frac{(xx'+yy'+zz')^2}{x^2+y^2+z^2};$$

enfin le produit $P_{2p+1}\,\rho^{2p+1}$ ne contient plus de radical et est homogène et de degré $2p+1$ en x, y, z. Bref, quelle que soit la parité de n, $P_n\rho^n$ est un polynome entier, homogène et de degré n en x, y, z.

Si l'on considère alors le terme général de la série (2)

$$X_n = \int \frac{\mu' P_n \rho^n}{\rho'^{n+1}}\, d\tau',$$

on voit que ce terme est aussi un polynome entier en x, y, z, homogène et de degré n.

On démontre en outre que ces polynomes X_n satisfont à l'équation de Laplace

$$\Delta X_n = 0.$$

Ce sont des *polynomes sphériques*, car on appelle, en général, de ce nom des polynomes homogènes en x, y, z satisfaisant à l'équation de Laplace. Le potentiel V est ainsi développé en série de la forme

$$V = X_0 + X_1 + \ldots\ldots + X_n + \ldots\ldots$$

Donc *le potentiel newtonien est développable en série de polynomes sphériques autour de l'origine, quand l'origine est extérieure aux masses agissantes.*

Dans ce développement, les termes de même degré sont groupés ensemble ; si l'on essayait de les grouper autrement, la série pourrait cesser d'être convergente.

C'est là un fait général pour les séries qui ne sont pas absolu-

ment convergentes ; on ne peut pas modifier arbitrairement l'ordre des termes. En voici un exemple simple; la série suivante de polynomes homogènes :

$$1 + (x+iy) + (x+iy)^2 + \ldots\ldots + (x+iy)^n + \ldots\ldots,$$

où l'on suppose

$$|x+iy| < 1,$$

est convergente et a pour somme

$$\frac{1}{1-(x+iy)},$$

en la considérant comme développée à la fois suivant les puissances de x et de y.

Elle n'est pas absolument convergente, dans tous les cas où elle converge. Groupons, en effet, les termes dans un autre ordre; par exemple, effectuons les puissances indiquées et séparons les termes; considérons le terme

$$x^n . (iy)^n . \frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

Quand n augmente indéfiniment, la valeur asymptotique du module de ce terme est :

$$\frac{(2n)^{2n} . e^{-2n} . \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} . e^{-2n}\sqrt{4\pi^2 n^2}} . x^n y^n.$$

ou, en supposant $x = y$:

$$\frac{(2x)^{2n}}{\sqrt{\pi n}};$$

ce terme ne peut tendre vers zéro que si l'on a :

$$|x| < \frac{1}{2}.$$

Si donc le module de x est supérieur à $\frac{1}{2}$, le nouveau développement est certainement divergent, alors que le premier est encore convergent pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Une pareille circonstance ne se présente pas pour les séries à termes positifs.

24. Développement du potentiel newtonien suivant les puissances entières de x, y, z. — Revenons au potentiel. Nous avons démontré que le potentiel newtonien est développable en série de polynomes sphériques autour de l'origine, quand celle-ci est extérieure aux masses agissantes. Montrons maintenant que, dans la même hypothèse, la fonction V est *holomorphe* au voisinage de l'origine, c'est-à-dire que, dans une sphère assez petite ayant pour centre l'origine, elle est développable en série de la forme

$$\sum A x^m y^n z^p,$$

m,n,p étant des nombres entiers positifs pouvant prendre toutes les valeurs entières de zéro à l'infini.

Pour le voir, rappelons que l'on a :

$$r^2 = \rho^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma + \rho'^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - (2xx' + 2yy' + 2zz') + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

et posons :

$$X = \frac{2xx' + 2yy' + 2zz' - x^2 - y^2 - z^2}{\rho'^2}$$

On a, en comparant r^2 et X :

$$r^2 = \rho'^2(1 - X),$$

d'où :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho'} \frac{1}{(1-X)^{\frac{1}{2}}}.$$

Développons $(1-X)^{-\frac{1}{2}}$; on a :

$$(1 - X)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots\ldots + a_n X^n + \ldots\ldots,$$

et, par conséquent,

(1) $$\frac{1}{r} = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots\ldots + \alpha_n X^n + \ldots\ldots$$

Dans cette série, les coefficients α sont tous > 0.

Développons maintenant X en série entière; nous sommes ainsi conduits, en transformant la relation (1), à représenter $\frac{1}{r}$ par une série de la forme

$$\frac{1}{r} = \sum A x^m y^n z^p.$$

et à représenter V par la série suivante :

$$(2) \qquad V = \sum x^m y^n z^p \int A \mu' d\tau'.$$

Ce développement est-il convergent et représente-t-il bien la fonction V? Nous allons le démontrer en prouvant que ce développement

$$(a) \qquad \sum x^m y^n z^p \int A \mu' d\tau',$$

est une série absolument et uniformément convergente.

A cet effet, posons :

$$X_0 = \frac{2x_0\rho' + 2y_0\rho' + 2z_0\rho' + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\rho'^2},$$

en appelant $x_0 y_0 z_0$ les modules de x, y et z, et considérons le développement suivant

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho'}(1 - X_0)^{-\frac{1}{2}} = \alpha_0 + \alpha_1 X_0 + \ldots\ldots + \alpha_n X_0^n + \ldots\ldots$$
$$= \sum A_0 x_0^m y_0^n z_0^p.$$

Étudions la série

$$(b) \qquad \sum A_0 x_0^m y_0^n z_0^p.$$

Comparons d'abord les coefficients A_0 aux coefficients correspondants A.

Tous les coefficients X_0 sont positifs; tous les α le sont aussi; donc tous les termes du développement (3) sont positifs, et par suite, les A_0 le sont également. Considérons, en outre, deux puissances égales de X et X_0 : X^q et X_0^q; chaque terme de X_0^q est plus

petit en module que le terme correspondant de X_0^q; on en conclut l'inégalité suivante :

$$A_0 > | A | .$$

Cela posé, reprenons la série (b); dans quel cas converge-t-elle? Elle convergera, si l'on a :

$$X_0 < 1,$$

comme on le voit en se reportant aux égalités (3).

Pour que X_0 soit plus petit que 1, il suffit que l'on ait :

$$(4) \qquad 2\rho'(x_0 + y_0 + z_0) + \rho^2 < \rho'^2;$$

or on a :

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \rho^2,$$

on a donc aussi :

$$| x_0 + y_0 + z_0 | < \rho\sqrt{3},$$

et la condition (4) sera remplie si l'on a :

$$2\rho'\rho\sqrt{3} + \rho^2 < \rho'^2,$$

ou bien

$$(\rho + \rho'\sqrt{3})^2 - 3\rho'^2 < \rho'^2,$$

c'est-à-dire

$$(\rho + \rho'\sqrt{3})^2 < 4\rho'^2,$$

c'est-à-dire enfin :

$$\rho < \rho'(2 - \sqrt{3}),$$

et, à fortiori, si l'on a :

$$\rho < a(2 - \sqrt{3}),$$

a désignant comme au paragraphe précédent le rayon d'une sphère fixe, ayant l'origine pour centre, tracée de manière à laisser à son extérieur toutes les masses agissantes, enfin contenant le point M où l'on étudie le développement du potentiel.

Supposons donc cette condition remplie; alors X_0 est inférieur à 1; la série (b) converge. Considérons maintenant la série suivante (c)

$$(c) \qquad \sum x_0^m y_0^n z_0^p \int A_0 \mu_0 d\tau$$

où μ_0 désigne un nombre positif supérieur à $|\mu|$; cette série converge comme la série (b). Enfin comparons notre série (c) à la série étudiée (a). Tous les termes de (a) sont inférieurs en module à ceux de (c); or (c) est une série à termes positifs et elle converge: donc (a) est absolument convergente.

La relation (2) est donc justifiée.

Ainsi le potentiel newtonien est développable autour de l'origine en série entière procédant suivant les puissances de x, y, z.

On peut effectuer, de même, le développement au voisinage d'un point quelconque $(x_0\ y_0\ z_0)$ extérieur aux masses; le développement procède alors suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

On peut donc énoncer en général le théorème suivant : *au voisinage d'un point* (x_0, y_0, z_0) *extérieur aux masses agissantes, le potentiel newtonien est une fonction holomorphe, c'est-à-dire développable en série entière procédant suivant les puissances croissantes de* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

La démonstration n'a été faite que pour un volume attirant; elle s'applique évidemment sans modification au cas d'une distribution quelconque de masses.

25. Autre développement en série du potentiel newtonien. — Considérons maintenant (fig. 20) un volume attirant T et un point M extérieur à ce volume, situé de telle sorte qu'on puisse tracer une sphère Σ contenant le volume T tout entier, mais laissant le point M à son extérieur.

Prenons le centre O de cette sphère comme origine des coordonnées.

Si ρ, ρ', γ et r ont les mêmes significations que précédemment, on a

$$\frac{1}{r} = [\rho^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma + \rho'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[1 - 2\frac{\rho'}{\rho}\cos\gamma + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\rho} + P_1\frac{\rho'}{\rho^2} + P_2\frac{\rho'^2}{\rho^3} + \ldots\ldots + P_n\frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} + R_n.$$

Le point M étant à l'extérieur de Σ, on peut construire une

deuxième sphère Σ', concentrique à Σ, dont le rayon εa est plus **grand** que le rayon a de Σ et qui laisse le point M à son extérieur ; on a donc :

$$\rho > \varepsilon a > a > \rho' \quad \text{et} \quad \varepsilon > 1$$

Raisonnons comme au § 23, on voit que

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{n+1}}{\rho - \rho'} < \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{1}{a(\varepsilon - 1)},$$

ce qui montre que la série :

$$\frac{1}{\rho} + P_1 \frac{\rho'}{\rho^2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} + \ldots\ldots$$

est uniformément convergente pour toute valeur de ρ' correspondant à un élément de volume quelconque $d\tau'$ de T.

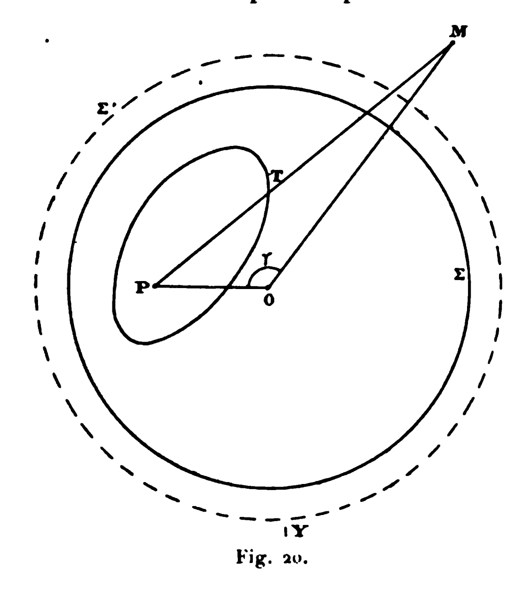


Fig. 20.

On peut, par conséquent, intégrer terme à terme et écrire

$$V = \int \frac{\mu' d\tau'}{\rho} + \int \frac{P_1 \rho' \mu' d\tau'}{\rho^2} + \ldots\ldots + \int \frac{P_n \rho'^n \mu' d\tau'}{\rho^{n+1}} + \ldots\ldots,$$

les intégrales étant étendues au volume T.

Considérons le terme général de cette série

$$\int \frac{P_n \rho'^n \mu \, d\tau'}{\rho^{n+1}};$$

on peut l'écrire :

$$\frac{1}{\rho^{2n+1}} \int P_n \rho^n \rho'^n \mu \, d\tau' = \frac{Y_n}{\rho^{2n+1}}.$$

$P_n \rho^n \rho'^n$ est un polynome homogène de degré n par rapport aux coordonnées x, y, z du point M : il en est donc de même de Y_n. Le développement de V prend la forme :

$$V = \frac{Y_0}{\rho} + \frac{Y_1}{\rho^3} + \dots + \frac{Y_n}{\rho^{2n+1}} + \dots$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\Delta V = 0,$$

on démontre sans peine que l'on a

$$\Delta \left(\frac{Y_n}{\rho^{2n+1}} \right) = 0,$$

et ensuite

$$\Delta Y_n = 0.$$

Les polynomes homogènes Y_n sont donc des polynomes sphériques.

Tout ce qui précède est vrai d'un point M quelconque extérieur à la sphère Σ ; si le point M s'éloigne indéfiniment, on voit que la valeur asymptotique de V est

$$\frac{Y_0}{\rho};$$

comme nous savons d'autre part que cette valeur asymptotique est $\frac{M}{\rho}$, M désignant la masse attirante totale, on conclut

$$Y_0 = M.$$

26. Développements analogues pour le potentiel logarithmique. — On peut obtenir des développements analogues pour le poten-

tiel logarithmique dans le plan. Soit (fig. 21) une surface plane attirante S, P un de ses points et O l'origine des coordonnées supposée extérieure à S. On peut tracer un cercle C ayant le point O comme centre et tout entier extérieur à l'aire attirante S.

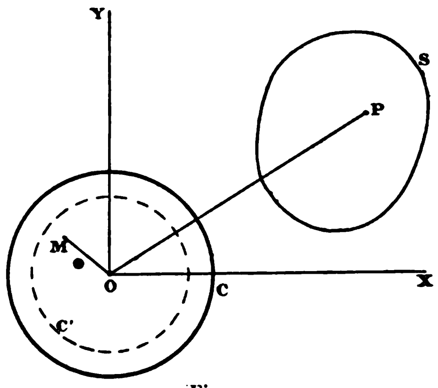


Fig. 21.

Soit, en outre, M un point attiré situé à l'intérieur du cercle C, x, y ses coordonnées et x', y' celles du point P. Appelons ρ, ρ', r les distances OM, OP et MP. Posons :

$$x + iy = z,$$
$$x' + iy' = z';$$

on a :

$$\rho = |z|,$$
$$\rho' = |z'|,$$
$$r = |z' - z|.$$

Soit μ' la densité de la matière attirante au point P; la valeur V du potentiel logarithmique en M est :

$$V = \int \mu' . \log \frac{r_0}{r} d\omega'.$$

$d\omega'$ désignant l'élément infinitésimal de l'aire S et l'intégrale double étant étendue à l'aire S tout entière. La valeur de V n'est autre que la partie réelle de l'intégrale.

$$W = \int \mu' \log \frac{r_0}{(z' - z)} d\omega'.$$

[illegible]

[illegible]

$$[illegible] \log \frac{[illegible]}{[illegible] - z}$$

[illegible]

$$\log \frac{[illegible]}{[illegible] - z} = \log \frac{[illegible]}{- z} - \log \left(1 - \frac{z}{z}\right).$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] peut développer [illegible] $1 - \frac{z}{z}$ [illegible] suivant les puissances [illegible] $\frac{[illegible]}{z}$

$$\log \left(1 - \frac{z}{z}\right) = \sum A_s z^{-s},$$

[illegible] convergente : on peut donc écrire :

(1) $$W = \int \log \frac{[illegible]}{- z} \mu \, d\omega - \sum z^{-s} \int - A_s \, \mu \, d\omega$$

les intégrales doubles étant étendues à l'aire S. En prenant les parties réelles des différents termes, on voit que la série du second membre de l'expression (1) donne lieu pour V à un développement procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\rho}$; ce développement est précédé, dans l'expression de V, par la partie réelle de l'intégrale :

$$\int \log \frac{r}{- z} \mu \, d\omega = \log. \frac{r}{- z} M,$$

M désignant la masse attirante totale ; cette partie réelle est :

$$M \log \frac{r_0}{\rho}.$$

Le développement de V est donc de la forme :

$$V = \int M \log \frac{r_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{n=\infty} R_n . \rho^{-n} \cos (n\omega - \theta_n)$$

en posant :

$$\int (-A_n) \mu' d\omega' = R_n e^{i\theta_n},$$

et

$$z = \rho e^{i\omega}.$$

Remarquons que l'expression :

$$\rho^{-n} \cos (n\omega - \theta_n),$$

peut s'écrire :

$$\rho^{-2n} . \rho^n \cos (n\omega - \theta_n) = \frac{X_n}{\rho^{2n}},$$

X_n étant un polynome entier, homogène, de degré n en x et y, satisfaisant, en outre, à l'équation de Laplace.

Finalement on a :

$$V = M \log \frac{r_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{X_n}{\rho^{2n}}.$$

On voit immédiatement, sous cette forme, que l'expression de V ne contient pas de terme indépendant d'x et d'y; en outre, lorsque le point M s'éloigne à l'infini, le potentiel V a pour valeur asymptotique

$$M \log \frac{r_0}{\rho},$$

résultat que nous connaissions déjà (§ 8).

CHAPITRE II

POTENTIEL EN UN POINT INTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES FORMULE DE POISSON

28. Convergence des intégrales. — Application au potentiel. — Jusqu'ici nous avons étudié le potentiel en des points extérieurs aux masses attirantes; nous allons maintenant étudier ce qui se passe quand le point attiré est situé au sein même de ces masses. Cette étude repose sur la considération d'intégrales portant sur des fonctions qui deviennent infinies pour un point du champ d'intégration; commençons donc par établir les propriétés de ces intégrales.

1° *Intégrales simples.* — Considérons l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad a < b.$$

Si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, la définition ordinaire de l'intégrale ne s'applique plus et l'intégrale n'a plus de sens; pour lui en donner un, on modifie la définition. On considère l'intégrale

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx;$$

la définition ordinaire s'y applique; soit J_ε sa valeur; si J_ε tend vers une limite J quand ε tend vers 0, l'intégrale est dite *convergente* et l'on représente cette limite J par la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si, au contraire, J_ε augmente indéfiniment ou n'a pas de limite,

quand ε tend vers 0, l'intégrale est dite *divergente* et le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

n'a aucun sens.

Voici des exemples de ces deux cas. Si l'on peut trouver un nombre $\alpha < 1$ tel que l'on ait

$$\left| f(x) \right| < \frac{1}{(x-a)^\alpha},$$

la limite J existe et l'intégrale est convergente. Si, au contraire, on peut trouver un nombre $\beta > 1$ tel que

$$\left| f(x) \right| > \frac{1}{(x-a)^\beta},$$

J_ε augmente indéfiniment et l'intégrale est divergente.

2° *Intégrales doubles.* — Soit une aire plane S (fig. 23), limitée par une courbe fermée C, et une fonction f (x, y) devenant infi-

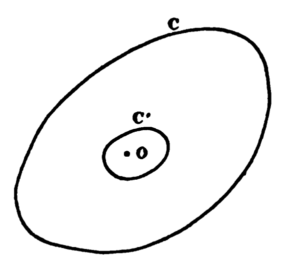


Fig. 23.

nie en un point O de l'aire S, mais restant continue en tous les autres points de l'aire.

L'intégrale double

$$\int\int_{(S)} f(x, y)\,d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de l'aire S, ne rentre pas dans la définition ordinaire et n'a aucun sens par elle-même. Pour lui en donner un, entourons le point O d'une petite courbe fer-

mée C′; appelons S′ l'aire enfermée par la courbe C′, et S″ l'aire comprise entre les courbes C et C′; l'intégrale

$$J_{c'} = \int\int_{S''} f(x, y)\, d\omega,$$

étendue à l'aire S″, a un sens et sa valeur varie quand la courbe C′ change de grandeur et de forme. Supposons que $J_{c'}$ ait une limite J quand la courbe C′, diminuant d'étendue dans tous les sens, vient s'évanouir au point O; on prend cette limite pour définition de l'intégrale $\int\int_S f(x, y)\, d\omega$; on dit alors que l'intégrale $J_{c'}$ est convergente.

Dans le cas contraire où $J_{c'}$ n'a pas de limite finie, l'intégrale $J_{c'}$ est dite divergente et l'intégrale $\int\int_S$ n'a aucun sens.

29. Dans quels cas l'intégrale $J_{c'}$ est-elle convergente? En voici un. Posons

$$OM = r,$$

et admettons que l'on ait en tout point de l'aire S :

$$\left| f(x, y) \right| < \frac{M}{r^\alpha}, \qquad \alpha < 2,$$

on peut alors affirmer que $J_{c'}$ est convergente. Pour le voir, sup-

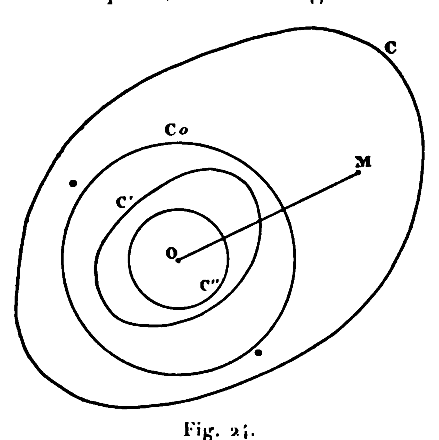


Fig. 24.

posons d'abord la fonction $f(x, y)$ positive en tout point de S. Traçons, autour du point O (fig. 24) comme centre, deux cercles,

l'un C_0, de rayon r_0, que nous laisserons fixe ; l'autre plus petit C'' dont nous ferons tendre le rayon r'' vers zéro. Enfin, pour simplifier le langage, désignons par les symboles

$$\iint_{c-c_0}, \quad \iint_{c-c''}, \quad \iint_{c_0-c''},$$

les intégrales étendues aux aires comprises respectivement entre les courbes : C et C_0, C et C'', C_0 et C''. L'intégrale

$$\iint_{c-c''} f(x, y)\, d\omega,$$

a un sens; elle est $>$ o et augmente quand r'' diminue. On a, de plus,

$$\iint_{c-c''} f(x, y)\, d\omega < \iint_{c-c''} \frac{M}{r^\alpha}\, d\omega,$$

et, par suite,

$$\iint_{c-c''} f(x, y)\, d\omega < \iint_{c-c_0} \frac{M}{r^\alpha}\, d\omega + \iint_{c_0-c''} \frac{M}{r^\alpha}\, d\omega;$$

la première intégrale du second membre reste fixe ; quant à la deuxième, elle a pour valeur :

$$\iint_{c_0-c''} \frac{M}{r^\alpha}\, d\omega = 2\pi \frac{M r_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} - 2\pi . \frac{M r''^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

et on voit que, si α est inférieur à 2, elle tend vers une limite finie quand r'' tend vers zéro.

L'intégrale du premier membre $\iint_{c-c''} f(x, y)\, d\omega$, qui reste toujours inférieure à cette limite et va sans cesse en augmentant quand r'' diminue, a donc aussi une limite.

Le résultat n'est pas changé, si l'on remplace la circonférence C'' par une courbe C' de forme quelconque entourant le point O et venant s'évanouir en ce point; on le voit facilement en traçant, autour de O pris comme centre, deux circonférences C_1'' et C_2'' comprenant entre elles la courbe C' et venant s'évanouir en O en même temps que celle-ci.

Supposons maintenant que la fonction f ait un signe quel-

conque; les conclusions précédentes s'y appliquent encore. Posons, en effet,

$$f = f_1 - f_2,$$

en convenant que l'on a :

$$f_1 = f \quad \text{et} \quad f_2 = 0,$$

en tous les points où f est > 0, et :

$$f_1 = 0 \quad \text{et} \quad f_2 = -f$$

en tous les points où f est < 0.

On peut appliquer à f_1 et f_2 le raisonnement précédent ; les deux intégrales :

$$J_1 = \int\int_{c-c'} f_1(x, y)\, d\omega \quad \text{et} \quad J_2 = \int\int_{c-c'} f_2(x, y)\, d\omega,$$

sont toutes deux convergentes ; leur différence,

$$J = \int\int_{c-c'} f(x, y)\, d\omega,$$

l'est donc aussi et la proposition énoncée plus haut se trouve entièrement démontrée.

On peut aller un peu plus loin : $\int\int_{c-c'} |f(x, y)|\, d\omega$ est convergente, car elle est égale à $J_1 + J_2$. Pour cette raison, l'intégrale J est dite *absolument convergente*. Remarquons enfin que les limites de ces quatre intégrales sont indépendantes de la suite des formes que prend le contour C' lorsqu'il vient s'évanouir au point O.

Tous ces résultats s'appliquent au potentiel d'une surface attirante, quand le point attiré est intérieur aux masses agissantes. Ce potentiel a pour expression :

$$V = \int\int \frac{\mu'}{r}\, d\omega'.$$

La fonction $f(x, y)$ du raisonnement précédent est ici $\frac{\mu'}{r}$; elle satisfait donc aux conditions suffisantes de convergence indiquées dans l'énoncé et l'intégrale V a un sens bien défini en tout point de la surface attirante.

30. ***Intégrales triples.*** — On définit la convergence, dans le cas des intégrales triples, comme dans celui des intégrales doubles. Soit S une surface fermée limitant un volume V; soit F (x, y, z) une fonction devenant infinie en un point du volume V, mais restant continue en tous les autres points; pour donner un sens à l'intégrale triple

$$J = \iiint_{(V)} F(x, y, z)\, d\tau,$$

on entoure le point O d'une surface fermée S' et l'on considère l'intégrale

$$J' = \iiint_{(V')} F(x, y, z)\, d\tau,$$

étendue au volume V' compris entre les deux surfaces S et S'. Si J' a une limite quand S' vient s'évanouir au point O, on dit que cette intégrale est convergente et cette limite est prise pour définition de J. Dans le cas contraire, J' est dite divergente et l'intégrale J n'a aucun sens.

On peut affirmer la convergence de J', lorsque l'on peut trouver deux nombres positifs, l'un M, fixe, et l'autre $\alpha < 3$, tels que l'on ait en tout point du volume V :

$$\left| F(x, y, z) \right| < \frac{M}{r^\alpha},$$

r désignant la distance du point O à un point quelconque x, y, z du volume. L'intégrale J' est en outre absolument convergente, car l'intégrale

$$\iiint_{(V')} \left| F(x, y, z) \right| d\tau,$$

converge aussi; la limite de J' est alors indépendante de la succession des formes que prend la surface S' et la valeur de J est bien déterminée. Un exemple de ce cas de convergence est fourni par le potentiel newtonien d'un volume attirant, quand le point attiré est à l'intérieur des masses agissantes. Ce potentiel est, en effet, représenté par l'intégrale triple

$$\int \frac{\mu' d\tau'}{r},$$

la fonction sous le signe $\int$ satisfaisant aux conditions énoncées ; cela suppose toutefois que la densité μ' reste finie.

Les composantes de l'attraction, elles-mêmes, sont données par des intégrales absolument convergentes. Soit, en effet, μ_0 une limite supérieure de la densité ; on a :

$$|\mu'| < \mu_0;$$

l'une des composantes, par exemple celle qui est parallèle à Ox, a pour expression :

$$X = \int \frac{\mu'(x'-x)}{r^3} d\tau'.$$

Or on a :

$$|x'-x| < r,$$

et, par conséquent,

$$\left| \frac{\mu'(x'-x)}{r^3} \right| < \frac{\mu_0}{r^2}.$$

X est donc absolument convergente.

31. Intégrales d'ordre quelconque. — Soit n l'ordre de l'intégrale ; quand n est supérieur à 3, on ne peut plus se servir de la représentation géométrique, mais le mode de raisonnement reste le même.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction de n variables et considérons l'intégrale d'ordre n :

$$J = \int F dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \ldots\ldots dx_n,$$

étendue par exemple à un champ défini par l'inégalité

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) < 0.$$

Supposons que F devienne infinie pour un point O du champ, dont nous pourrons supposer les n coordonnées égales à zéro sans restreindre la généralité.

Posons

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2.$$

Appelons J′ l'intégrale $\int F\,dx_1\,dx_2\ldots\ldots dx_n$ étendue au champ défini par les inégalités :

$$\Phi < 0,$$
$$r > \rho > 0.$$

L'intégrale J′ a un sens si nous supposons la fonction F continue en tout point du champ primitif autre que le point O. Si, quand ρ tend vers zéro, J′ a une limite, cette limite définit J; sinon, J n'a aucun sens; dans le premier cas, il y a convergence et, dans le second, divergence. On peut affirmer la convergence dans le cas où l'on a en tout point du champ primitif :

$$\left|F\right| < \frac{M}{r^{\alpha}}, \quad \text{avec} \quad \alpha < n,$$

M désignant un nombre positif fixe.

32. Intégrales absolument convergentes et intégrales semi-convergentes. — Exemples. — Revenons aux intégrales de ligne, de surface et de volume.

Soit

$$J = \int F dt,$$

une intégrale simple, double ou triple suivant que dt désigne un élément de ligne, de surface ou de volume. Supposons que la fonction F devienne infinie ou discontinue en un point du champ d'intégration et qu'on ait démontré la convergence de l'intégrale J. On dit que cette intégrale est *absolument convergente*, si l'intégrale

$$\int \left|F\right| dt,$$

étendue au même champ, est elle-même convergente ; dans le cas contraire, l'intégrale J est dite *semi-convergente*. Nous avons donné (29 et 30) des exemples d'intégrales absolument convergentes. Voici maintenant des exemples d'intégrales semi-convergentes.

Premier exemple. — Soit l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx,$$

Elle est convergente, car :

$$\lim_{l=\infty} \int_0^l \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2};$$

elle est semi-convergente, car :

$$\lim_{l=\infty} \int_0^l \frac{|\sin ax|}{x} dx = \infty$$

Deuxième exemple. — Soit un cercle attirant limité par une circonférence C; supposons la densité constante et égale à 1; proposons-nous de calculer l'attraction au centre O (fig. 25).

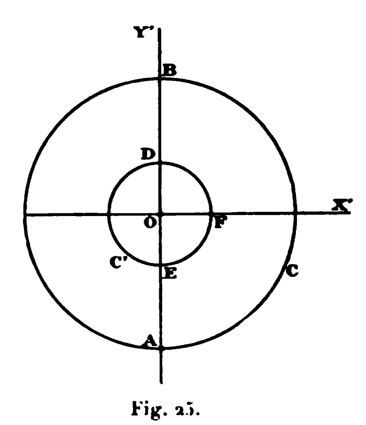


Fig. 25.

Prenons pour origine ce point et, pour axes de coordonnées, deux droites rectangulaires Ox', Oy'. L'une des composantes de l'attraction, X par exemple, a pour expression au centre :

$$X = \int^{\circ} \frac{x'}{r^3} d\omega'.$$

Cette intégrale est convergente.

En effet, entourons le centre d'un cercle C' concentrique au premier et considérons l'intégrale :

$$J_{c'} = \int_{c-c'}^{\circ} \frac{x'}{r^3} d\omega',$$

étendue à la couronne comprise entre les deux circonférences.

Appelons ε le rayon de C′, ρ celui de C et passons en coordonnées polaires ; on a :

$$J_{c'} = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_\varepsilon^\rho \frac{dr}{r} = (\sin 2\pi - \sin 0) \log \frac{\rho}{\varepsilon} = 0.$$

Ainsi $J_{c'}$ est constamment nulle. Sa limite est 0, quand ε tend vers zéro. L'intégrale X est donc convergente.

Montrons qu'elle est semi-convergente, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int \frac{|x'|}{r^3} d\omega',$$

ne converge pas.

Cette intégrale, étendue à tout le cercle, est égale au double de l'intégrale

$$\int \frac{x'}{r^3} d\omega',$$

étendue au demi-cercle BCAB.

Calculons donc celle-ci ; si elle a un sens, elle est la limite de la portion correspondante de $J_{c'}$ relative à la demi-couronne BCAEFDB. Or, celle-ci est égale à :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d(\sin\theta) \int_\varepsilon^\rho \frac{dr}{r} = 2 \log \frac{\rho}{\varepsilon},$$

quantité qui augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro. L'intégrale X est donc semi-convergente. On peut démontrer de plus : étant convergente, elle a une limite quand on entoure le point O d'une courbe C′, puis qu'on calcule l'intégrale relative à l'espace compris entre les deux courbes, et enfin qu'on fait évanouir C′ au point O ; mais, étant semi-convergente, sa limite dépend de la courbe C′ et de la succession des formes que prend cette courbe avant de s'évanouir au point O.

C'est ce que je vais montrer.

Supposons d'abord que C′ soit une circonférence concentrique à C; la raison de symétrie, comme aussi le calcul fait précédemment, montrent que l'attraction de la couronne au point O est nulle. Etant nulle constamment, elle définit une limite nulle, quand C′ vient s'évanouir au point O.

Par un autre procédé, au contraire, on peut définir une limite différente de zéro. Dans les raisonnements qui vont suivre, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme. — ***Deux surfaces attirantes homothétiques S et S′, telles que les densités en deux points correspondants soient égales, exercent la même attraction au centre O d'homothétie.***

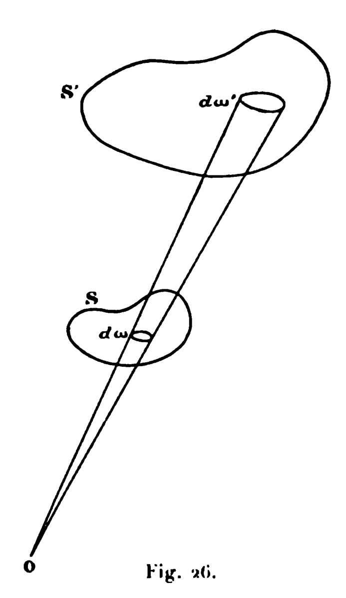


Fig. 26.

Ce lemme est presque évident : soient, en effet, deux éléments correspondants (fig. 26) dω et dω′, r et r′ leurs distances respectives au point O ; leurs attractions au point O sont :

$$\text{pour } d\omega : \frac{\mu' d\omega}{r^2}$$

$$\text{pour } d\omega' : \frac{\mu' d\omega'}{r'^2}$$

Ces deux attractions dirigées suivant la même droite sont bien égales, puisqu'en vertu de l'homothétie, on a :

$$\frac{d\omega}{r^2} = \frac{d\omega'}{r'^2}.$$

Cela posé, reprenons notre cercle C et prenons comme courbe auxiliaire une autre circonférence C′ (fig. 27), non concentrique à C, ayant son centre en un point O′ voisin de O. Menons la ligne des centres OO′ ; cette droite coupe nos deux circonférences aux points A, B pour la première et A′, B′ pour la seconde.

Supposons que, des deux points A′ et B′, le plus rapproché de O soit A′; décrivons alors, du point O comme centre avec OA′ comme rayon, une circonférence C_1.

Appelons ρ, ρ', ρ_1 les rayons des circonférences C, C′ et C_1, puis traçons une circonférence C_0 tangente en A à la proposée C et telle que son rayon ρ_0 satisfasse à la relation

$$\frac{\rho_0}{\rho'} = \frac{\rho}{\rho_1}. \qquad (1)$$

Alors les deux cercles C_0 et C' sont homothétiques par rapport au point O et le rapport d'homothétie est $\frac{\rho}{\rho_1}$. D'autre part les deux cercles C et C_1, étant concentriques, ont aussi pour centre d'homothétie le point O et même rapport d'homothétie que les deux précédents en vertu de la relation (1). Il en résulte que les

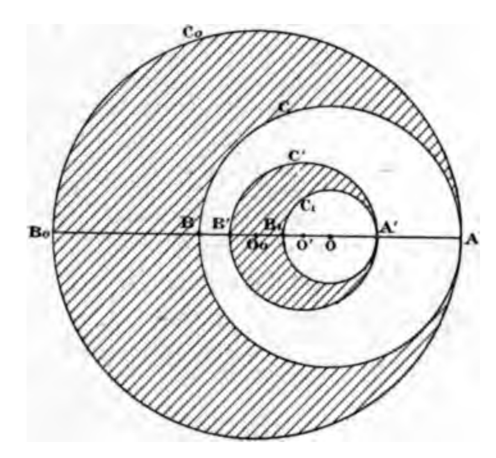


Fig. 27.

deux portions de plan couvertes de hachures, l'une comprise entre les circonférences C_0 et C, l'autre entre les circonférences C' et C_1, sont homothétiques par rapport au point O. Si donc on suppose la première couverte de matière attirante avec une densité égale à 1 comme celle qui recouvre le cercle C, son attraction au point O sera la même que celle de la seconde.

Nous exprimerons cette propriété par l'égalité

$$A_{C'-C_1} = A_{C_0-C}, \tag{2}$$

désignant en général par $C_m - C_n$ la portion de plan comprise entre les courbes C_m et C_n, et par $A_{C_m-C_n}$ l'attraction que cette portion de plan exerce au point O.

Cela posé, ce que nous voulons calculer, c'est la limite vers laquelle tend $A_{C-C'}$ quand le cercle C' vient s'évanouir au point O.

Or, on a évidemment :

$$A_{C-C'} = A_{C-C_1} - A_{C'-C_1},$$

ce qui se réduit à :

$$\Lambda_{c-c'} = - \Lambda_{c'-c_1} \tag{3}$$

puisque Λ_{c-c_1} est nulle, par raison de symétrie. Rapprochons les relations (2) et (3), nous aurons :

$$\Lambda_{c-c'} = - \Lambda_{c_0-c}. \tag{4}$$

Faisons alors évanouir le cercle C' au point O de manière que le rapport $\frac{\rho'}{\rho_1}$ reste constant, les deux termes de ce rapport tendant vers zéro. En vertu de la relation (1), le rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ reste aussi constant et, par conséquent, le cercle C_0 reste invariable ; il en résulte que Λ_{c_0-c} reste fixe.

Ainsi, l'intégrale qu'il s'agit d'étudier, $\Lambda_{c-c'}$, reste constamment égale à une quantité fixe $-\Lambda_{c_0-c}$; on peut donc écrire :

$$\lim. \Lambda_{c-c'} = - \Lambda_{c_0-c}.$$

Montrons maintenant que Λ_{c_0-c} n'est pas nulle. Cela est presque évident.

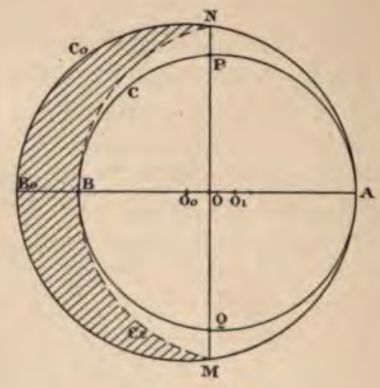


Fig. 27 *bis*.

Figurons à part (fig. 27 *bis*) les deux circonférences C_0 et C; traçons la droite MN perpendiculaire en O à la ligne des centres. Enfin, décrivons une troisième circonférence C_2 égale à C_0 et tangente intérieurement en B à la circonférence C; cette circonférence passe évidemment par les points M et N. L'aire atti-

rante $C_0 - C$ est ainsi divisée en deux parties : l'une comprise entre les trois circonférences C, C_0 et C_2 ; l'autre comprise entre C_2 et C_0 ; elle est représentée, dans la figure, couverte de hachures. La première partie a manifestement une action nulle au point O par raison de symétrie ; quant à la seconde, son action est dirigée suivant la ligne des centres et ne peut être nulle, car tous ses éléments, étant situés d'un même côté de MN, les projections sur AB de leurs actions en O sont toutes de même signe.

En résumé, A_{c_0-c} est différente de zéro et, par conséquent, on a :

$$\lim A_{c_0-c'} \neq 0.$$

On voit donc que, suivant la courbe auxiliaire choisie pour définir l'attraction au point O et suivant la succession de formes par lesquelles on fait passer cette courbe, on peut obtenir pour l'attraction une limite nulle ou une limite différente de zéro. Cette circonstance caractérise les intégrales semi-convergentes.

Des considérations analogues pourraient être faites au sujet d'une surface quelconque. On verrait, de la même façon, que les composantes de l'attraction, en un point d'une surface attirante, sont données par des intégrales semi-convergentes.

Au contraire, le potentiel d'une surface attirante, que nous allons étudier maintenant, va nous fournir un exemple d'intégrale absolument convergente.

33. Autre exemple. — **Potentiel d'une surface attirante quelconque en un point de cette surface.** — Soit S une surface attirante ; son potentiel en un point M est donné par l'intégrale :

$$(1) \qquad V = \int_{(S)} \frac{\mu' d\omega'}{r},$$

μ', r, $d\omega'$ étant les notations connues.

Supposons que le point M soit pris sur la surface S elle-même ; nous allons montrer que l'intégrale précédente garde un sens et est absolument convergente, si la densité μ' reste finie en tout point et si la surface S admet, en M, un plan tangent unique.

Menons ce plan tangent (fig. 28) ; prenons-le pour plan des xy et prenons le point M pour origine ; soient P le centre de gravité

d'un élément dω de S, P' sa projection sur le plan des xy, φ l'angle de ce plan avec le plan tangent en P, enfin x', y', z' les coordonnées de P ; on a :

$$(2) \qquad d\omega = \frac{dx'\,dy'}{\cos\varphi}.$$

Cela posé, traçons sur S une courbe C entourant le point M et soit C' sa projection ; la courbe C partage S en deux zones,

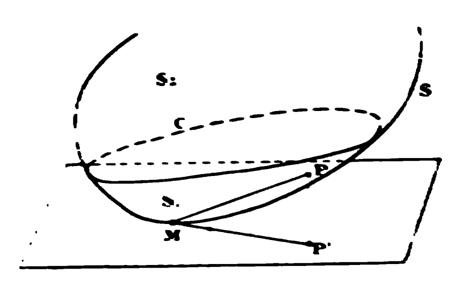


Fig. 25.

S_1 et S_2, la première, S_1, étant celle qui comprend le point M. Appelons V_1 et V_2 les potentiels respectifs de S_1 et S_2 : on a :

$$V = V_1 + V_2.$$

V_2 a un sens au point M : il suffit d'étudier V_1 : cette intégrale a pour expression :

$$V_1 = \int_{S_1} \frac{\mu\, d\omega}{r} ;$$

en vertu de (2), on peut l'écrire :

$$V_1 = \int_{C'} \frac{\mu'}{r\cos\varphi}\, dx'\,dy'.$$

Cette dernière intégrale est étendue à une aire plane, à la portion du plan des xy comprise à l'intérieur de C'.

Or, on peut choisir la calotte S_1 assez petite pour, qu'en chacun de ses points, on ait :

$$\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| < \alpha,$$

α désignant un nombre fixe; cela est possible, car, au point M, $\cos\varphi$ est égal à 1.

Ecrivons alors la fonction sous le signe $\int$, $\frac{\mu'}{r\cos\varphi}$, de la manière suivante

$$\frac{\mu' \frac{1}{\cos\varphi} \frac{r'}{r}}{r'} = \frac{m'}{r'},$$

en posant

$$m' = \mu' \frac{1}{\cos\varphi} \frac{r'}{r},$$

et

$$r' = MP'.$$

L'intégrale devient alors :

$$V_1 = \int_{(c')} \frac{m'}{r'} dx'dy'; \tag{3}$$

m' peut être considéré comme une fonction de x', y', puisqu'à chaque point P et, par suite, à chaque point P', est attachée une valeur de m' ; de plus, cette fonction est essentiellement limitée, car elle est égale au produit de trois autres qui sont limitées : μ' l'est, par hypothèse, et $\frac{1}{\cos\varphi}$, par construction, enfin $\frac{r'}{r}$ est inférieur à 1. L'intégrale (3) est alors le potentiel en M d'une portion du plan des xy, celle que limite C', sur laquelle la densité de la matière attirante est la fonction m'. Nous avons vu (**29**) qu'une pareille intégrale est absolument convergente. Le théorème général est donc démontré.

Dans ce qui précède, nous avons supposé, pour plus de simplicité, que la surface S était pourvue d'un plan tangent bien déterminé en chacun des points qui avoisinent le point M. Cette hypothèse n'est pas toujours indispensable.

Prenons, en effet, le cas d'un cône circulaire droit. Supposons que M soit le sommet de ce cône. Prenons pour plan des xy le plan perpendiculaire à l'axe du cône et effectuons les mêmes transformations que ci-dessus. On a encore facilement une limite supérieure de $|m'|$. En effet, μ' est une quantité finie ; $\frac{r'}{r}$ est le

cosinus de l'angle d'une génératrice du cône avec sa projection; $\frac{1}{\cos\varphi}$ reste égal à l'inverse du cosinus de l'angle d'un plan tangent au cône avec le plan xy. On peut donc refaire ici le raisonnement indiqué plus haut.

La conclusion subsiste encore si le point M est un point singulier de la surface S, lorsque le cône des tangentes en ce point est, par exemple, un cône réel du second ordre, ou lorsque ce cône se réduit à un système de deux plans réels distincts. Cela se voit, comme dans le cas du cône circulaire droit.

34. Analogie avec les séries. — Avant de poursuivre l'application des principes précédents à l'étude du potentiel, faisons une remarque.

La théorie des intégrales convergentes doit être rapprochée de celle des séries. Les dénominations de *convergente, absolument convergente, semi-convergente*, se définissent pareillement dans les deux théories et les propriétés correspondantes sont comparables. Les deux théorèmes suivants mettent en évidence cette analogie étroite :

1° Quand une série est absolument convergente, on peut modifier l'ordre des termes sans en changer la somme;

2° Quand une intégrale est absolument convergente, on peut choisir arbitrairement la courbe ou la surface évanouissante qui entoure le point de discontinuité et la faire passer par une succession quelconque de formes. On peut aussi intervertir l'ordre des intégrations.

Ce dernier point se démontre sans difficulté. Soit, par exemple, l'intégrale double

$$J = \int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à une aire plane S limitée par une courbe C; supposons que la fonction f devienne infinie en un point M du champ d'intégration et, qu'en tout point de l'aire, on ait :

$$\left| f(x, y) \right| < \frac{M}{r^{\alpha}}, \quad \text{avec} \quad \alpha < 2,$$

M étant un nombre positif fixe ; l'intégrale est alors absolument convergente.

Entourons le point M d'un cercle Σ de rayon ρ, ayant ce point pour centre. Le champ d'intégration est ainsi partagé en deux parties, S_0 et S_1, S_0 étant la portion du champ comprise à l'intérieur de Σ. Appelons J_0 et J_1 les valeurs de l'intégrale ci-dessus, quand on prend respectivement pour champs d'intégration S_0 et S_1.

On a :

$$J = J_0 + J_1.$$

Pour J_1, on peut intervertir l'ordre des intégrations, puisque la fonction reste finie dans le domaine S_1. Voyons ce qui se passe pour J_0; on a :

$$\left| J_0 \right| < \int M \frac{dx\,dy}{r^\alpha},$$

et, par suite,

$$\left| J_0 \right| < \frac{2\pi M \rho^{2-\alpha}}{2-\alpha};$$

en prenant ρ assez petit, on peut rendre $|J_0|$ inférieur à un nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ donné à l'avance. Intervertissons l'ordre des intégrations; J et J_0 deviennent J′ et J'_0, et, puisque J_1 ne change pas, on a :

$$J - J' = J_0 - J'_0;$$

mais on a :

$$\left| J_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| J'_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

donc :

$$| J_0 - J'_0 | < \varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$| J - J' | < \varepsilon,$$

quel que soit ε. Comme $J - J'$ est bien déterminé et ne dépend pas de ρ, on a nécessairement

$$J = J',$$

ce qui démontre qu'on peut intervertir l'ordre des intégrations.

Cette remarque permet de démontrer facilement un théorème

relatif au potentiel ; soit T un volume attirant, M un point intérieur, V le potentiel en M, et X une des composantes de l'attraction en ce point. V et X sont donnés par les intégrales suivantes :

$$V = \int_T \frac{\mu'}{r} d\tau', \qquad X = \int_T \mu \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau',$$

Ces intégrales sont absolument convergentes (30). Considérons l'intégrale quadruple :

$$\int_{x_0}^{x_1} X dx,$$

x_0 et x_1 désignant les valeurs de x en deux points M_0 et M_1. Cette intégrale est absolument convergente. Je me propose de démontrer la relation suivante :

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} X dx = V_1 - V_0,$$

V_1 et V_0 étant les valeurs du potentiel en M_1 et M_0. Cette relation serait évidente, si l'on avait démontré que $X = \frac{\partial V}{\partial x}$; cette démonstration sera faite plus loin dans le cas — qui est le cas actuel — où le point M est intérieur aux masses agissantes. Pour l'instant, démontrons directement la relation (1). L'intégrale s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_T \mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} d\tau',$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\int_T \mu' d\tau' \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} dx = \left[\int_T \frac{\mu'}{r} d\tau'\right]_{M_0}^{M_1} = V_1 - V_0,$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

35. Potentiel newtonien d'un volume attirant. Existence des dérivées premières. — Soit T un volume attirant, M un point inté-

rieur aux masses agissantes ; le potentiel en M est donné par l'intégrale :

$$V = \int_{(T)} \frac{\mu'}{r} d\tau'.$$

et les composantes de l'attraction en ce point par les intégrales :

$$X = \int \frac{\mu'(x' - x)}{r^3} d\tau'.$$

$$Y = \int \frac{\mu'(y' - y)}{r^3} d\tau'.$$

$$Z = \int \frac{\mu'(z' - z)}{r^3} d\tau'.$$

Ces quatre intégrales sont absolument convergentes (**30**).

Lorsque le point attiré M est extérieur aux masses agissantes, les composantes de l'attraction sont aussi les dérivées premières du potentiel. Je vais faire voir qu'il en est de même, quand M est intérieur aux masses agissantes.

Je vais démontrer, par exemple, que $\frac{\partial V}{\partial x}$ existe et que l'on a :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Traçons (fig. 29) une sphère Σ, ayant pour centre M et pour

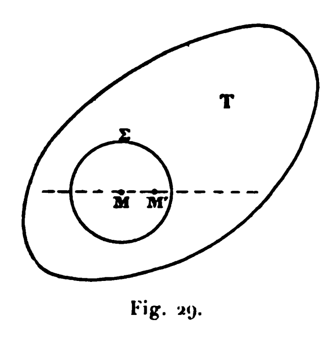


Fig. 29.

rayon ρ. Sur une parallèle à Ox menée par M, prenons un point M' voisin de M et situé à l'intérieur de la sphère ; les coordon-

nées de M et M' sont : pour M : x, y, z; pour M' : x + h, y, z. Par définition, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{h=0} \frac{V'-V}{h}.$$

Nous devons donc montrer que l'expression

$$\left|\frac{V'-V}{h} - X\right|,$$

peut être rendue inférieure à un nombre donné ε, si l'on prend h suffisamment petit.

La sphère Σ divise le volume T en deux parties, l'une T_0, comprise à l'intérieur de la sphère, l'autre T_1, constituée par la partie restante du volume T.

Appelons :

X_0, X_1, X les composantes en M,

V_0, V_1, V les potentiels en M,

dus respectivement aux attractions de la première partie, de la deuxième et du volume total;

X'_0, X'_1, X'
V'_0, V'_1, V' les valeurs de ces mêmes fonctions en M';

on a :

$$V = V_1 + V_0, \qquad V' = V'_1 + V'_0,$$
$$X = X_1 + X_0, \qquad X' = X'_1 + X'_0,$$

et l'on peut écrire :

$$\frac{V'-V}{h} - X = \left(\frac{V'_1-V_1}{h} - X_1\right) + \left(\frac{V'_0-V_0}{h} - X_0\right).$$

Comme M et M' sont extérieurs au volume partiel T_1, on peut différentier l'intégrale V_1 sous le signe $\int$ et l'on a, par conséquent,

$$X_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x}.$$

Si donc on pose :

$$\left|\frac{V'_1-V_1}{h} - X_1\right| = \varphi(\rho, h),$$

on peut prendre h assez petit pour que la valeur de cette fonction $\varphi(\rho, h)$ soit aussi petite que l'on veut. Occupons-nous maintenant de l'expression :

$$\frac{V'_0 - V_0}{h} - X_0.$$

Supposons la densité μ' finie dans tout le volume T et soit μ^0 une limite supérieure de cette densité.

On a :

$$\left| X_0 \right| < \mu_0 \int_{(T_0)} \frac{d\tau'}{r^2};$$

or :

$$\int_{(T_0)} \frac{d\tau'}{r^2} = 4\pi\rho,$$

donc :

$$| X_0 | < 4\pi\rho\mu_0.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure de $\frac{V'_0 - V_0}{h}$. Figurons à part (fig. 30) la sphère Σ; soit P le centre de gravité

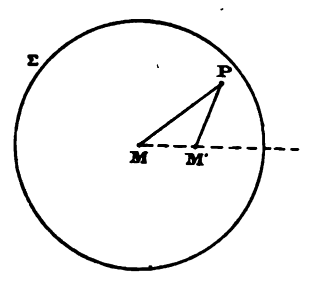


Fig. 30.

d'un élément $d\tau'$ du volume T_0; menons MP et M'P, puis posons :

$$MP = r, \qquad M'P = r',$$

et rappelons-nous que $MM' = h$. On a :

$$V'_0 - V_0 = \int_{(T_0)} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \mu' d\tau',$$

et, de plus,

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{r - r'}{rr'},$$

$$| r' - r | < h,$$

$$\frac{1}{rr'} < \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2},$$

d'où :

$$\left| \frac{V'_0 - V_0}{h} \right| < \mu_0 \int_{T_0} \frac{d\tau'}{r^2} + \mu_0 \int_{T_0} \frac{d\tau'}{r'^2}.$$

Nous connaissons la valeur de $\int_{T_0} \frac{d\tau'}{r^2}$, c'est $4\pi\rho$; calculons une limite supérieure de $\int_{T_0} \frac{d\tau'}{r'^2}$. Pour cela, du point M' comme centre (fig. 31), décrivons une sphère Σ ayant $\rho + h$ pour rayon. Les

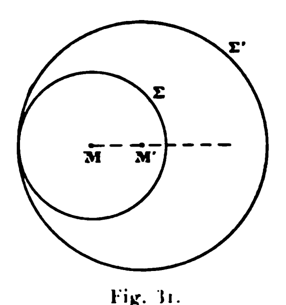


Fig. 31.

deux sphères Σ' et Σ sont tangentes intérieurement ; appelons T'_0 le volume compris à l'intérieur de la sphère Σ'. On a

$$\int_{T_0} \frac{d\tau'}{r'^2} < \int_{T'_0} \frac{d\tau'}{r'^2}$$

et comme : $\int_{T'_0} \frac{d\tau'}{r'^2} = 4\pi(\rho + h)$,

on a aussi :

$$\int_{T_0} \frac{d\tau'}{r'^2} < 4\pi(\rho + h).$$

On a donc :

$$\left| \frac{V'_0 - V_0}{h} \right| < 4\pi(2\rho + h)\mu_0,$$

et enfin :

$$\left| \frac{V'_0 - V_0}{h} - X_0 \right| < 4\pi(3\rho + h) < \mu_0 16\pi\rho\mu_0.$$

En somme, nous pouvons écrire l'inégalité :

$$\left| \frac{V' - V}{h} - X \right| < \varphi(\rho, h) + 16\pi\rho\mu_0.$$

Cela posé, proposons-nous de rendre le premier membre inférieur à un nombre donné ε, en prenant h suffisamment petit; il nous suffit, pour cela, de prendre ρ assez petit pour que

$$16\pi\rho\mu_0 < \frac{\varepsilon}{2};$$

puis, ρ étant fixé, de prendre h assez petit pour que

$$\varphi(\rho, h) < \frac{\varepsilon}{2};$$

on aura, dès lors,

$$\left| \frac{V' - V}{h} - X \right| < \varepsilon,$$

ce qui démontre que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ existe et qu'elle est égale à X.

Le potentiel V a donc des dérivées premières, en tout point intérieur aux masses, et ces dérivées sont égales aux composantes de l'attraction, ce qui fait qu'on les obtient en différentiant sous le signe $\int$.

36. Étude des dérivées secondes. — Si l'on différentie une fois de plus sous le signe $\int$, les intégrales obtenues sont seulement semi-convergentes; on rencontre ces mêmes intégrales dans la théorie du magnétisme où leur étude est nécessaire; mais, dans la théorie du potentiel, on l'évite par un artifice.

Nous allons démontrer que, si la densité μ' a des dérivées de tous les ordres, le potentiel V en a aussi de tous les ordres.

Soit, en effet,

$$V = \int \frac{\mu'}{r} d\tau'$$

le potentiel ; l'une des dérivées premières, $\frac{\partial V}{\partial x}$ par exemple, a pour expression :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{\mu'(x'-x)}{r^3} d\tau ;$$

on peut l'écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau' = -\int \mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'} d\tau'.$$

Ceci posé, rappelons une formule que nous avons démontrée (19), à propos de la formule de Green ; reprenons toutes les notations de ce paragraphe, nous aurons :

$$(1) \qquad \int_{T} U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x'} d\tau' = \int_{(S)} \alpha U_1 V_1 d\omega - \int_{(T)} V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x'} d\tau',$$

la première intégrale et la troisième étant étendues au volume attirant T que nous considérons ; la deuxième, à la surface S qui limite ce volume. Servons-nous de cette formule pour transformer l'intégrale $\frac{\partial V}{\partial x}$; posons :

$$U_1 = \mu',$$
$$V_1 = \frac{1}{r};$$

la formule (1) nous donne alors :

$$(2) \quad -\int_{(T)} \mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} d\tau' = -\int_{(S)} \frac{\alpha\mu'}{r} d\omega' + \int_{(T)} \frac{1}{r} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau'.$$

On voit donc que, si $\frac{\partial \mu'}{\partial x'}$ existe, l'expression de $\frac{\partial V}{\partial x}$ est égale à la somme de deux potentiels : un potentiel de surface

$$\int_{(S)} \frac{\alpha\mu'}{r} d\omega',$$

et un potentiel de volume

$$\int_{(T)} \frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x'}\right)}{r} d\tau' ;$$

or, le premier a des dérivées premières, en tout point non situé sur la surface; quant au second, il en a, de même (35), en tout point intérieur ou extérieur; $\frac{\partial V}{\partial x}$ en a donc aussi, sauf sur la surface; par conséquent, V a des dérivées secondes en tout point de l'espace, sauf, peut-être, sur la surface; à leur tour, les potentiels du second membre de la formule (2) ont des dérivées secondes, si les dérivées secondes de μ' existent et, par suite, V a des dérivées troisièmes; le raisonnement se poursuit ainsi de proche en proche et le théorème annoncé se trouve démontré.

37. Formons l'expression de chaque dérivée seconde et celle de leur somme; la formule (2) nous donne :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \alpha' \frac{\mu'}{r} d\omega' + \int \frac{\frac{\partial \mu'}{\partial x'}}{r} d\tau'.$$

On peut différentier sous le signe $\int$ dans le second membre; on peut donc écrire :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\int \alpha'\mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\omega' + \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau'$$

$$= \int \alpha'\mu' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} d\omega' - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau';$$

on a pour $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ des expressions analogues. Ajoutons-les membre à membre, nous aurons :

$$\Delta V = \int \mu' \left[\alpha' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'} \right] d\omega'$$

$$-\int \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} \frac{\partial \mu'}{\partial y'} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \frac{\partial \mu'}{\partial z'} \right] d\tau'$$

que l'on peut écrire

$$\Delta V = \int \mu' \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega' - \int \sum \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau'.$$

38. Formule de Poisson. — Autour du point M (fig. 32), traçons une sphère Σ, ayant M pour centre et un rayon égal à ρ; elle par-

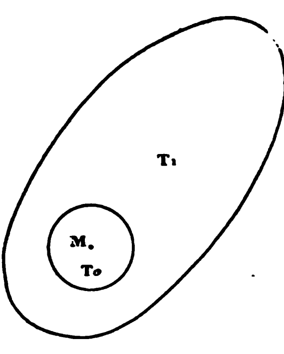


Fig. 32.

tage le volume T en deux autres T_0 et T_1, T_0 étant celui qui est intérieur à la sphère; appelons V_0 et V_1 les valeurs de leurs potentiels respectifs au point M.

On a :

$$V = V_1 + V_0,$$

et

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_0 ;$$

comme

$$\Delta V_1 = 0,$$

il reste :

$$\Delta V = \Delta V_0$$

et par suite on a :

$$\Delta V = \int_{(\Sigma)} \mu' \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega' - \int_{(T_0)} \sum \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau',$$

la première intégrale étant étendue à la surface de la sphère et la seconde à son volume.

Comme nous supposons que les dérivées premières de μ existent, l'expression :

$$\left| \frac{\mu' - \mu}{\rho} \right|,$$

où μ désigne la densité au point M, doit rester finie ; μ lui-même et ses dérivées premières étant supposés finis, on peut assigner à toutes ces fonctions une limite supérieure commune μ'_0, de sorte que l'on a les inégalités :

$$\left| \mu' - \mu \right| < \mu'_0 \rho, \qquad \left| \mu \right| < \mu'_0 \left| \frac{\partial \mu'}{\partial x'} \right| < \mu'_0 \ldots\ldots \text{ etc.},$$

à l'intérieur de la sphère.

Remarquons enfin que l'on peut écrire :

$$\mu' = \mu + (\mu' - \mu),$$

et que l'on a sur la sphère :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

ΔV devient alors :

$$\Delta V = -\int \mu \frac{1}{\rho^2} d\omega' - \int \frac{\mu' - \mu}{\rho^2} d\omega'$$
$$-\int \sum \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau'.$$

La première intégrale a pour valeur :

$$-\int \frac{\mu}{\rho^2} d\omega' = -\frac{\mu}{\rho^2} \int d\omega' = -4\pi\mu.$$

La deuxième tend vers zéro, en même temps que ρ, car on a :

$$\left| \int \frac{\mu' - \mu}{\rho^2} d\omega' \right| < 4\pi\mu'_0\rho.$$

La troisième tend aussi vers zéro, car on a :

$$\left| \int \sum \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} d\tau' \right| < 3 \int \frac{\mu'_0}{r^2} d\tau';$$

or l'intégrale du second membre a pour valeur $4\pi\mu'_0\rho$, celle du premier est donc inférieure à $12\pi\mu'_0\rho$; elle tend vers zéro avec ρ.

Bref on peut écrire :

$$\Delta V = -4\pi\mu + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec ρ; comme ΔV et μ ne dépendent pas de ρ, on a rigoureusement :

$$\Delta V = -4\pi\mu.$$

C'est la *formule de Poisson*.

Remarque. — ΔV, considéré comme fonction de x, y, z, est continu, à l'intérieur et à l'extérieur du volume, mais éprouve une discontinuité, quand on franchit la surface; il en est, de même, de chacune des dérivées secondes de V et des dérivées d'ordre supérieur.

39. Potentiel logarithmique d'une surface attirante. — Tout ce que nous avons dit du potentiel newtonien d'un volume est vrai du potentiel logarithmique d'une surface attirante.

En un point M de la surface attirante, le potentiel logarithmique V est représenté par l'intégrale double :

$$\int \log \frac{r_0}{r} \mu' d\omega'.$$

et l'une des composantes X de l'attraction par :

$$\int \frac{x'-x}{r^2} \mu' d\omega' = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{r_0}{r}\right) \mu' d\omega'.$$

On démontre sans peine que ces intégrales sont absolument convergentes et que l'on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X.$$

L'équation de Poisson devient

$$\Delta V = -2\pi\mu.$$

Tout cela peut se démontrer directement; mais on peut le considérer comme une conséquence des propriétés du potentiel newtonien : on a démontré, en effet (**15**), que le potentiel logarithmique d'une surface plane est le même que le potentiel newtonien d'un certain cylindre ayant cette surface pour section droite. La matière attirante qui remplit ce cylindre a une densité constante et égale à $\frac{1}{2}\mu'$, tout le long d'une même génératrice, μ' désignant la densité superficielle de la section droite dont on étudie le potentiel logarithmique, au point où elle est rencontrée par la génératrice considérée.

CHAPITRE III

SURFACES ATTIRANTES ET LIGNES ATTIRANTES

SURFACES ATTIRANTES

40. Notations et remarques préliminaires. — Étant donnés une surface attirante S et un point M sur cette surface, nous avons vu (**33**) que le potentiel en ce point est représenté par une intégrale absolument convergente, et les composantes de l'attraction par des intégrales semi-convergentes (**32**).

Nous allons voir maintenant ce qui se passe quand le point M est extérieur à la surface, mais très voisin d'elle, et qu'il tend vers un point donné M_0 de cette surface en suivant la droite MM^0 (fig. 33).

Établissons d'abord la notation que nous emploierons dans toute cette étude.

Prenons le point M_0 comme origine des coordonnées; supposons qu'en ce point la surface admette un plan tangent unique et prenons ce plan comme plan des xy. Pour abréger les calculs, nous supposerons, en outre, que la surface est régulière en M_0, c'est-à-dire qu'au voisinage de ce point, l'une des coordonnées d'un point de la surface est fonction analytique des deux autres. En réalité, cette hypothèse est inutile et nos démonstrations subsisteront, en supposant qu'*au point* M_0 *la surface possède un plan tangent unique et deux rayons de courbure bien déterminés.*

Nous désignerons par $d\omega'$ un élément de la surface, par P son centre de gravité, par P′ la projection de P sur le plan des xy; enfin par x, y, z les coordonnées du point M et par x′, y′, z′ celles du point P. Les coordonnées de P étant x′, y′, z′, celles de P′ sont x′, y′, — 0 et l'on a $PP' = z'$.

z' est une fonction de x', y'; appelons-la $f(x', y')$. L'équation

$$z' = f(x', y'),$$

est l'équation de la surface.

D'après notre hypothèse, z' est développable, au voisinage de M_0, en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x', y'

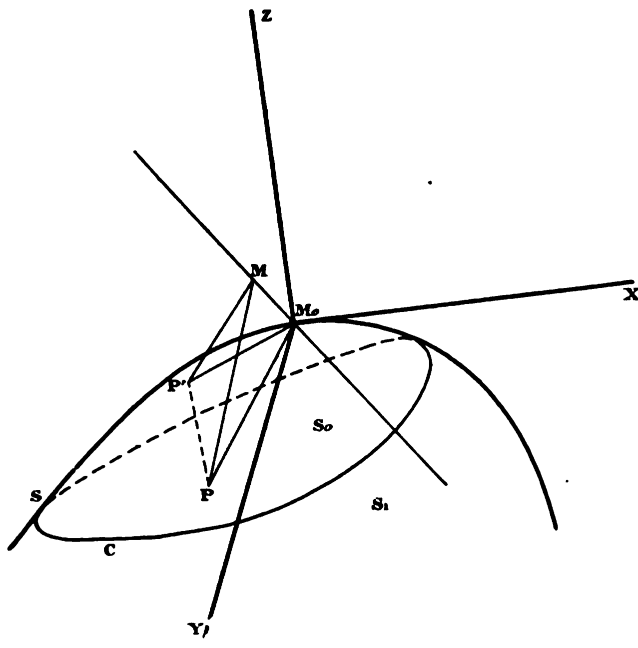


Fig. 33.

et le développement commence par des termes du second degré, puisque le plan des xy est tangent en M_0; il est donc de la forme :

$$z' = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + \ldots\ldots$$

Dans nos démonstrations, nous ne ferons usage que des termes du second degré; c'est ce qui fait qu'elles seront encore vraies, en supposant seulement l'existence d'un plan tangent unique et de rayons de courbure principaux bien déterminés.

expression qui reste toujours finie. Le rapport $\frac{r_0^2}{r^2}$ et, par suite, le rapport $\frac{r_0}{r}$ restent finis. On peut donc assigner à ce dernier une limite supérieure A et écrire :

$$\frac{r_0}{r} < A.$$

D'une manière analogue, on démontre que les deux rapports $\frac{r}{r'}$ et $\frac{r'}{r}$ restent finis. On peut, par conséquent, trouver deux nombres positifs B et C tels que :

$$\frac{r}{r'} < C \quad \text{et} \quad \frac{r'}{r} < B.$$

2° Considérons maintenant le rapport

$$\frac{z'}{r^2}.$$

Ce rapport est fini, tant que r est différent de zéro ; je vais faire voir qu'il en est de même quand r s'annule.

Quand z' est infiniment petit, sa partie principale est de la forme :

$$ax'^2 + bx'y' + cz'^2,$$

comme nous l'avons vu précédemment.

La partie principale de $\frac{z'}{r^2}$ est donc :

$$\frac{ax'^2 + bx'y' + cy'^2}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2},$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{a\left(\frac{x'}{z}\right)^2 + b\frac{x'}{z}\frac{y'}{z} + c\left(\frac{y'}{z}\right)^2}{\left(\frac{x'}{z} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{y'}{z} - \beta\right)^2 + 1},$$

Sous cette forme, on voit que ce rapport reste toujours fini. Nous appellerons D une limite supérieure de ce rapport.

Abordons maintenant l'étude du potentiel de S.

42. Etude du potentiel. — Appelons V et V_0 les potentiels en M et M_0 de la surface entière S; V' et V'_0 de la calotte S_0; V'' et V''_0 ceux de la portion restante S_1. On sait que V_0 est exprimé par une intégrale absolument convergente (33). Nous allons démontrer que l'on a :

$$\lim V = V_0,$$

quand M tend vers M_0. On a, en effet,

$$V = V' + V'', \qquad V_0 = V'_0 + V''_0,$$

d'où :

$$V - V_0 = (V' - V'_0) + (V'' - V''_0).$$

Considérons V' et V'_0; ces quantités sont données par les intégrales

$$V' = \int_{(S_0)} \frac{\mu' d\omega'}{r}, \qquad V_0' = \int_{(S_0)} \frac{\mu' d\omega'}{r_0},$$

que l'on peut écrire :

$$V' = \int \frac{\mu' dx' dy'}{r \cos \varphi}, \qquad V_0' = \int \frac{\mu' dx' dy'}{r_0 \cos \varphi}.$$

Choisissons la courbe C de manière que sa projection C' sur le plan des xy soit une circonférence, ayant pour centre M_0 et un rayon égal à ρ.

Les intégrales V_0' et V' sont étendues à l'aire de ce cercle.

On a, en vertu des hypothèses et des remarques faites (40 et 41) :

$$V' < \int \gamma \frac{dx'dy'}{r} < \int A\gamma \frac{dx'dy'}{r_0} < \int \frac{A\gamma dx'dy'}{r'_0}$$

Toutes ces intégrales sont étendues au cercle de rayon ρ. On peut alors écrire :

$$\int \frac{A\gamma}{r'_0} dx' dy' = A\gamma \int_0^\rho \frac{dx'dy'}{r'_0} = A\gamma 2\pi\rho,$$

car on voit facilement, en partageant le cercle en anneaux concentriques, que l'intégrale du second membre $\int_0^\rho \frac{dx' dy'}{r'_0}$ a pour valeur $2\pi\rho$.

Bref, on a l'inégalité :

$$V' < 2\pi A \gamma \rho.$$

De même, on démontre que :

$$V'_0 < 2\pi \gamma \rho.$$

On a, par conséquent, l'inégalité :

$$| V' - V'_0 | < 2\pi (A + 1) \gamma \rho,$$

et l'on peut rendre ρ assez petit pour que l'on ait :

$$\left| V' - V'_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant un nombre choisi à l'avance.

Considérons maintenant V'' et V''_0 potentiels, en M et M_0 de la portion restante S_0 de la surface; ρ étant fixé par l'inégalité précédente, rapprochons le point M du point M_0 assez pour que l'on ait :

$$\left| V'' - V''_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

cela est possible, puisque V'' est une fonction qui reste continue, quand on franchit la surface au point M_0.

Mais, d'autre part, on a :

$$V - V_0 = V' - V'_0 + V'' - V''_0 ;$$

on a, par suite,

$$| V - V_0 | < | V' - V'_0 | + | V'' - V''_0 | < \varepsilon;$$

ainsi, on peut rendre la différence $V - V_0$ aussi petite qu'on le veut, en rapprochant suffisamment M de M_0; par définition, on a donc

$$\lim V = V_0,$$

quand M tend vers M_0.

Remarque. — D'après la démonstration précédente, on voit que le potentiel V, continu en tout point de l'espace extérieur, reste continu quand on franchit la surface attirante.

Ce potentiel V est une fonction de la forme

$$(1) \qquad \int \frac{f(x', y')\,dx'dy'}{r},$$

et, ce qui a joué le rôle essentiel dans la démonstration, c'est qu'on a pu assigner une limite supérieure à la fonction f.

On peut donc dire, qu'en général, toute fonction de la forme (1) est continue dans tout l'espace si l'on peut assigner une limite supérieure à la fonction f qui figure sous le signe $\int$, et cela est vrai, même si cette fonction dépend, non seulement de x', y', mais encore de x, y, z.

43. Préparation à l'étude des composantes de l'attraction. — Établissons le lemme suivant :

Lemme. — Soit l'intégrale simple :

$$J(z) = \int_0^{r} \frac{f(x, z)}{\varphi(x)}\,dx,$$

où x désigne la variable d'intégration et z un paramètre. C'est une fonction de z.

Faisons les hypothèses suivantes :

1° L'intégrale

$$\int_0^{Z} \frac{dx}{\varphi(x)},$$

reste finie et tend vers une limite finie, quand Z augmente indéfiniment.

2° $\varphi(x)$ reste constamment positive quand x varie de 0 à ∞.

3° La fonction $f(x, z)$ admet une limite supérieure A, de telle sorte que l'on a :

$$|f(x, z)| < A,$$

4° Enfin l'on a :

$$\lim f(x, z) = 1,$$

quand z tend vers zéro, quel que soit x, même s'il varie, pourvu qu'il reste fini; en d'autres termes, $f(x, z)$ *tend uniformément* vers 1, quand z tend vers zéro, pourvu que x reste compris entre 0 et une limite supérieure fixe L.

Je dis alors que, si l'on fait tendre z vers zéro et augmenter Z indéfiniment, on a :

$$\lim J(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Pour démontrer ce lemme, posons :

$$\theta(\rho) = \int_0^\rho \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

En vertu de la première hypothèse, l'intégrale a un sens quand ρ est infini et l'on peut écrire :

$$\lim_{\rho=\infty} \theta(\rho) = \theta(\infty).$$

On sait d'autre part que, si F(x) et Φ(x) désignent deux fonctions de x continues dans un intervalle a, b, le théorème de la moyenne donne :

$$\int_a^b F(x)\Phi(x)\,dx = F(\xi)\int_a^b \Phi(x)\,dx \quad \text{avec} \quad a < \xi < b.$$

pourvu que Φ garde un signe constant dans l'intervalle a, b.

Appliquons cela à l'intégrale J(z) en remarquant qu'on peut l'écrire :

$$\int_0^\rho \frac{f(x, z)}{\varphi(x)}\,dx + \int_\rho^Z \frac{f(x, z)}{\varphi(x)}\,dx,$$

on aura :

$$J(z) = f(\xi, z)\int_0^\rho \frac{dx}{\varphi(x)} + f(\xi', z)\int_\rho^Z \frac{dx}{\varphi(x)}$$

ou bien :

$$(1) \qquad J(z) = f(\xi, z)\,\theta(\rho) + f(\xi', z)\,[\theta(Z) - \theta(\rho)],$$

avec les inégalités :

$$0 < \xi < \rho \quad \text{et} \quad \rho < \xi' < Z.$$

Transformons la relation (1), on a :

$$J(z) = f(\xi, z)\,\theta(\infty) + f(\xi, z)\,[\theta(\rho) - \theta(\infty)]$$
$$+ f(\xi', z)\,[\theta(Z) - \theta(\rho)],$$

ou encore

$$J(z) = f(\xi, z)\,\theta(\infty) + [f(\xi, z) - f(\xi', z)]\,[\theta(\rho) - \theta(\infty)]$$
$$+ f(\xi', z)\,[\theta(Z) - \theta(\infty)],$$

On a, en outre, les inégalités suivantes :

$$|\, f(\xi, z)\,| < A; \quad |\, f(\xi', z)\,| < A; \quad |\, f(\xi, z) - f(\xi', z)\,| < 2A;$$

on peut donc poser :

$$f(\xi', z) = \varepsilon A, \qquad f(\xi, z) - f(\xi', z) = 2\,\varepsilon_1 A,$$

ε et ε_1 étant des fonctions de ξ et ξ', restant toujours comprises entre -1 et $+1$.

Posons encore :

$$f(\xi, z)\,\theta(\infty) = \theta(\infty) + B.$$

B tend uniformément vers zéro quand, ξ restant fini, z tend vers zéro, car, dans ce cas, $\mathrm{Lim}\, f(\xi_1, z) = 1$.

L'expression de J (z) devient alors :

$$J(z) = \theta(\infty) + B + 2\,\varepsilon_1 A\,[\theta(\rho) - \theta(\infty)] + \varepsilon A\,[\theta(Z) - \theta(\infty)],$$

d'où :

$$(2) \quad J(z) - \theta(\infty) = B + 2\,\varepsilon_1 A\,[\theta(\rho) - \theta(\infty)] + \varepsilon A\,[\theta(Z) - \theta(\infty)].$$

Or, nous voulons démontrer que :

$$\lim_{\substack{Z=\infty \\ z=0}} J(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi(x)} = \theta(\infty),$$

ou, en d'autres termes, que le premier membre de la relation (2) tend vers zéro, ou, si l'on veut, que l'on peut prendre Z assez grand et z assez petit pour rendre $|J(z) - \theta(\infty)|$ inférieur à un nombre donné η, aussi petit que l'on voudra.

Cette démonstration se fait facilement à l'aide de la relation (2) ; on a :

$$(3) \qquad |\, J(z) - \theta(\infty)\,| < |\, B\,| + 2A\,|\,\theta(\rho) - \theta(\infty)\,|$$
$$+ A\,|\,\theta(Z) - \theta(\infty)\,|\,.$$

Le second membre de cette inégalité se compose de trois termes.

On peut prendre ρ assez grand pour que le deuxième terme $2A\,|\theta(\rho) - \theta(\infty)|$ soit inférieur à $\frac{\eta}{3}$.

On peut de même prendre x assez grand pour que le troisième terme $A|[\theta(x) - \theta(\infty)]|$ soit, lui aussi, inférieur à $\frac{\eta}{3}$.

ρ et χ étant ainsi fixés, ξ et ξ' restent finis, quel que soit z, et l'on peut prendre z assez petit pour que $|B|$ soit inférieur à $\frac{\eta}{3}$, puisque, ξ et ξ' étant finis, B tend uniformément vers zéro.

ρ, χ et z étant ainsi choisis, on a :

$$|J(z) - \theta(\infty)| < \eta.$$

Le lemme annoncé est donc démontré.

44. — On peut démontrer un lemme semblable pour les intégrales doubles.

Soit l'intégrale :

$$J(z) = \int_{(S)} \frac{f(x, y, z)}{\varphi(x, y)}\,dx\,dy,$$

étendue à une aire plane S limitée par un contour C qui tend à embrasser tout le plan. C'est une fonction de z.

On fait les hypothèses suivantes :

1° L'intégrale

$$\int \frac{dx\,dy}{\varphi(x, y)},$$

garde un sens et reste finie quand on l'étend à tout le plan.

2° La fonction $\varphi(x, y)$ est positive en tout point x, y du plan.

3° La fonction $f(x, y, z)$ reste finie et l'on peut lui assigner une limite supérieure A.

4° Cette même fonction f tend uniformément vers 1, quand z tend vers zéro, le point x, y restant à l'intérieur d'un contour fermé, aussi étendu qu'on le veut, mais fixe.

Dans ces conditions, je dis que l'on a :

$$\lim J(z) = \int \frac{dx\,dy}{\varphi(x, y)},$$

l'intégrale du second membre étant étendue à tout le plan, lorsque la courbe C s'agrandit indéfiniment et que z tend vers zéro.

Pour démontrer ce lemme, on considère un cercle Σ ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ ; on pose :

$$\theta(\rho) = \int_{(\Sigma)} \frac{dxdy}{\varphi(x, y)}.$$

La première hypothèse montre que $\theta(\infty)$ a un sens et l'on peut écrire :

$$\lim_{\rho=\infty} \theta(\rho) = \theta(\infty).$$

Cela posé, supposons le contour C assez grand pour que S contienne Σ et appelons

$$J(z), \qquad J'(z), \qquad J''(z),$$

les valeurs de l'intégrale proposée

$$\int \frac{f(x, y, z)}{\varphi(x, y)} dxdy,$$

quand on l'étend respectivement au champ C tout entier, au cercle Σ, à la portion comprise entre C et Σ. On a évidemment :

$$J = J' + J''. \tag{1}$$

L'application du théorème de la moyenne à chaque membre de l'égalité (1) permet d'écrire l'égalité :

$$J(z) = f(\xi, \eta, z)\, \theta(\rho) + f(\xi', \eta', z)\, [\theta_c - \theta(\rho)], \tag{2}$$

θ_c désignant la valeur que prend l'intégrale $\int \frac{dx\,dy}{\rho(x,y)}$, quand on l'étend au champ limité par la courbe C ; ξ, η désignant les coordonnées d'un point situé à l'intérieur du cercle Σ ; ξ', η' celles d'un point situé entre les courbes C et Σ.

Le reste de la démonstration se fait comme pour le lemme précédent.

45. Composantes de l'attraction. — Les composantes dirigées suivant M_0X et M_0Y s'appellent *composantes tangentielles ;* elles

sont exprimées par des intégrales qui varient continûment quand le point M se déplace et franchit la surface au point M_0.

La composante dirigée suivant M_0Z, dite *composante normale*, est exprimée par une intégrale semi-convergente et éprouve une brusque discontinuité quand on franchit la surface.

Nous allons préciser ces énoncés en commençant par l'étude de la composante normale.

46. Etude de la composante normale. — La composante normale Z est exprimée par l'intégrale :

$$Z = \int \frac{\mu'(z' - z)}{r^3} d\omega',$$

qui peut s'écrire :

$$(1) \qquad Z = \int \frac{\mu' z'}{r^3} d\omega' - \int \frac{\mu' z}{r^3} d\omega',$$

Ces intégrales sont étendues à tous les éléments $d\omega'$ de la surface attirante.

Z est ainsi exprimée par la différence de deux intégrales que nous allons examiner successivement.

Remarquons tout de suite, qu'au point de vue de leurs discontinuités, il suffit d'étendre ces intégrales à la calotte S_0.

Plaçons-nous donc dans ce cas.

Voyons d'abord la première $Z_1 = \int \frac{\mu' z'}{r^3} d\omega'$; transformons-la :

$$\int \frac{\mu' z'}{r^3} d\omega' = \int \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{z'}{r^2} \frac{dx'dy'}{r};$$

l'intégrale du second membre est de la forme :

$$\int \frac{f(x', y') dx'dy'}{r},$$

en posant :

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{z'}{r^2} = f(x', y').$$

La fonction f reste finie puisque :

$$\left|\frac{\mu'}{\cos\varphi}\right| < \gamma \quad \text{et} \quad \left|\frac{z'}{r^2}\right| < D,$$

et que, par suite,

$$|f(x', y')| < \gamma D.$$

L'intégrale considérée est donc (42) une fonction continue.

47. — Étudions maintenant la seconde intégrale qui entre dans l'expression de Z. Cette intégrale est :

$$Z_2 = \int \frac{\mu' z}{r^3} d\omega'.$$

On peut l'écrire :

$$\int \frac{z}{r'^3} \frac{r'^3}{r^3} \frac{\mu'}{\cos\varphi} dx'dy',$$

ou encore, si l'on appelle μ la densité au point M_0,

(1) $$\int \frac{\lambda(x', y', z)}{\left(\frac{r'^3}{\mu z}\right)} dx'dy',$$

en posant :

$$\lambda(x', y', z) = \frac{r'^3}{r^3} \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{1}{\mu}.$$

Changeons de variables et posons :

$$x' = \xi z,$$
$$y' = \eta z.$$

La fonction sous le signe $\int$ dans Z_2 est ainsi transformée en une fonction de ξ, η, z.

Voyons quel est le champ d'intégration.

L'intégrale Z_2 était étendue, dans le système des anciennes coordonnées x', y', z, à la projection S'_0 sur le plan des xy de l'aire S_0. Nous pouvons toujours choisir le contour de S_0 de

manière que S'_0 soit un cercle, ayant le point M_0 pour centre. Soit ρ son rayon ; l'équation de ce cercle est :

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2.$$

Par le changement de variables, l'intégrale (1) devient :

$$(2) \qquad \int \frac{\lambda\mu}{[(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta,$$

cette nouvelle intégrale étant étendue au cercle Σ_0 :

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\rho^2}{z^2},$$

lequel tend à embrasser tout le plan des $\xi\eta$, quand z tend vers zéro.

Cela posé, examinons la fonction λ.

D'abord elle reste toujours finie ; car on a, en vertu des inégalités démontrées au paragraphe **40** :

$$|\lambda| < \frac{B^3\gamma}{\mu}.$$

Je dis, de plus, que cette fonction tend vers 1 uniformément quand, ξ et η restant finis, z tend vers zéro.

Considérons en effet le rapport $\frac{r'^3}{r^3}$, il a pour expression en général

$$\left[\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Remplaçons, dans ce rapport, z' par son développement en fonction de x', y' ; ce développement est, d'après nos hypothèses, une série entière procédant suivant les puissances croissantes de x', y' et commençant par des termes du second degré :

$$z' = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + \ldots\ldots$$

Le rapport ci-dessus peut donc s'écrire :

$$\left[\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + \ldots\ldots - z)^2}\right]^{\frac{3}{2}},$$

Exprimons-le à l'aide des nouvelles variables ξ, η, z, il deviendra :

$$\left[\frac{(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+1}{(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+(a\xi^2 z+b\xi\eta z+c\eta^2 z+\ldots\ldots-1)^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Quand z tend vers zéro, ξ et η restant finis, ce rapport tend vers :

$$\frac{(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+1}{(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+1}=1.$$

Ainsi $\frac{r'^3}{r^3}$, considéré comme fonction de ξ, η et z, tend vers 1 quand, ξ et η restant finis, z tend vers zéro ; on peut donc écrire :

$$\frac{r'^3}{r^3}=1+\varepsilon_1,$$

ε_1 étant une fonction de ξ, η, z qui s'annule pour $z=o$, si ξ et η sont finis, quelles que soient d'ailleurs leurs valeurs.

Considérons maintenant l'expression :

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi}\,\frac{1}{\mu}.$$

Nous avons supposé que $\frac{\mu'}{\cos\varphi}$ est développable en série procédant suivant les puissances croissantes de x' et y' ; il en est donc de même de $\frac{1}{\mu}\,\frac{\mu'}{\cos\varphi}$, puisque μ est une constante. Le terme tout connu dans ce développement est évidemment la valeur de l'expression considérée pour $x'=y'=o$, c'est-à-dire pour le point M_0. Or, en ce point, on a :

$$\mu'=\mu \quad \text{et} \quad \cos\varphi=1;$$

on a donc :

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi}\,\frac{1}{\mu}=1,$$

au point M_0 et l'on peut poser, en général,

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi}\,\frac{1}{\mu}=1+\varepsilon_2, \tag{3}$$

ε_2 étant une fonction de x', y' qui s'annule en M_0 ; si nous considérons l'expression étudiée comme une fonction de ξ, η, z, on peut encore écrire l'égalité (3), ε_2 désignant une quantité qui s'annule quand z s'annule et que ξ et η restent finis, étant d'ailleurs quelconques.

La fonction λ prend ainsi la forme :

$$\lambda = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) = 1 + \varepsilon_3.$$

Dans cette formule, ε_3 est, comme ε_1 et ε_2, une fonction de ξ, η, z qui tend uniformément vers zéro, quand z tend vers zéro.

Il est donc démontré que la fonction λ tend uniformément vers 1, quand z tend vers zéro, ξ et η pouvant varier, mais restant finis.

Dans cette démonstration, nous avons supposé que la densité μ' est une fonction analytique de x', y', au voisinage de M_0. Cette hypothèse n'est pas nécessaire ; il suffit de supposer que la densité μ' est simplement continue par rapport aux variables x', y' ; elle est alors uniformément continue par rapport à z et l'on peut écrire encore la relation (3).

Reprenons maintenant l'expression (2) de Z_2 :

$$Z_2 = \int \frac{\lambda}{\frac{1}{\mu}\left[(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}} d\xi \, d\eta.$$

et considérons la fonction :

$$\lambda' = \frac{1}{\mu}\left[(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}},$$

qui entre en dénominateur sous le signe $\int$.

Cette fonction a évidemment un signe constant ; de plus, elle est telle que l'intégrale J_0,

$$J_0 = \int \frac{d\xi \, d\eta}{\frac{1}{\mu}\left[(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}},$$

étendue au cercle Σ_0 défini plus haut, tend vers une limite J_1

quand le cercle Σ_0 s'étale indéfiniment et tend à embrasser tout le plan.

Nous démontrerons cette propriété tout à l'heure ; admettons-la pour l'instant et tirons-en des conséquences.

L'intégrale Z_2 a ainsi été mise sous la forme :

$$Z_2 = \int_{(\Sigma_0)} \frac{\lambda}{\lambda'} d\xi d\eta.$$

Nous pouvons lui appliquer le lemme démontré au paragraphe précédent; λ possède les propriétés de la fonction f et λ' celles de φ. Cette intégrale a donc une limite, quand z tend vers zéro et que le cercle Σ_0 s'étale indéfiniment, et cette limite est égale à celle de l'intégrale J_0, c'est-à-dire à J_1. On peut donc écrire :

$$\lim_{z=0} \int \frac{\lambda}{\lambda'} d\xi d\eta = J_1,$$

ou

$$\lim_{z=0} Z_2 = J_1.$$

Démontrons maintenant que la limite J_1 existe et évaluons sa valeur.

Considérons donc l'intégrale :

$$J_0 = \int \frac{d\xi d\eta}{\frac{1}{\mu}[(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+1]^{\frac{3}{2}}},$$

étendue au cercle Σ_0

$$\xi^2+\eta^2 = \frac{\rho^2}{z^2},$$

et calculons sa limite quand Σ_0 s'étale indéfiniment, c'est-à-dire, en revenant aux anciennes variables, calculons la limite de l'intégrale :

$$J_0 = \mu \int_{(S'_0)} \frac{z\, dx' dy'}{r'^3},$$

quand z tend vers zéro.

Figurons (fig. 34) l'élément ab $= dx'dy'$ du **domaine** S'_0 **dans le** plan des xy **et** considérons le cône, ayant pour sommet le point

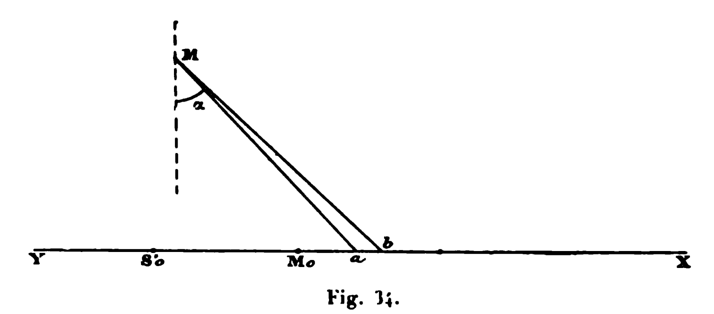


Fig. 34.

M et pour base cet élément; appelons α l'angle de Ma avec l'axe des z et $d\tau$ l'angle solide d'ouverture de ce cône ; on a :

$$\text{Ma} = r', \qquad \cos \alpha = \frac{z}{r'},$$

$$d\tau = \frac{dx'dy'}{r'^2}\,\cos\alpha = \frac{z\,dx'dy'}{r'^3},$$

L'angle solide Ω d'où l'aire S'_0 est vue du point M est donc :

$$\Omega = \int_{(S'_0)} \frac{z\,dx'dy'}{r'^3},$$

et l'on voit que :

$$J_0 = \mu\Omega.$$

Quand z tend vers zéro, Ω tend vers $\pm\, 2\pi$ et J_0 vers $\pm\, 2\pi\mu$; J_0 a donc une limite J_1 quand z tend vers zéro, et cette limite est égale à $+\, 2\pi\mu$, si z tend vers zéro par valeurs positives et à — $2\pi\mu$, si z tend vers zéro par valeurs négatives. Il en est de même de l'intégrale Z_2 puisque

$$\lim_{z=0} Z_2 = J_1.$$

48. Résumons tout ceci :

Nous avons mis Z sous forme d'une différence de deux intégrales Z_1 et Z_2 :

$$Z = Z_1 - Z_2.$$

La première Z_1 reste continue quand on franchit la surface. Quant à la deuxième Z_2, elle tend vers $+2\pi\mu$ ou $-2\pi\mu$, suivant que M tend vers M_0 d'un côté ou de l'autre de la surface.

Considérons alors deux points M' et M'' situés de part et d'au-

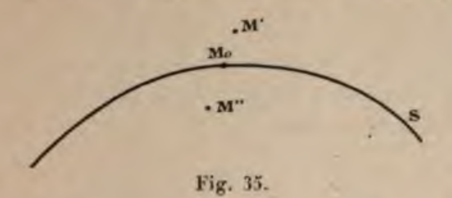


Fig. 35.

tre de la surface et très voisins de M_0 (fig. 35). Soient Z' et Z'', Z'_1 et Z''_1, Z'_2 et Z''_2 les valeurs respectives de Z, Z_1, Z_2, en chacun de ces points. On a :

$$\text{au point } M' : Z' = Z'_1 - Z'_2,$$
$$\text{au point } M'' : Z'' = Z''_1 - Z''_2,$$

d'où :

$$Z' - Z'' = Z'_1 - Z''_1 - (Z'_2 - Z''_2).$$

Supposons le point M' situé du côté des z positifs et M'' du côté des z négatifs, puis faisons tendre M' et M'' vers M_0; la fonction Z_1 étant continue, la différence $Z'_1 - Z''_1$ tendra vers zéro; Z'_1 et Z''_2 tendront respectivement vers $+2\pi\mu$ et $-2\pi\mu$, leur différence $Z'_2 - Z''_2$ tendra donc vers $4\pi\mu$ et par conséquent la différence $Z' - Z''$ tendra vers $-4\pi\mu$.

La composante normale de l'attraction éprouve donc un saut brusque de $4\pi\mu$ *quand on franchit la surface au point où la densité est* μ.

Les raisonnements qui précèdent n'ont été faits, il est vrai, que pour la calotte de surface S_0; mais, la partie restante S_1 de la surface n'influant pas sur les discontinuités quand on traverse S_0, la discontinuité de la composante normale est la même pour la surface S entière que pour la calotte S_0 qui entoure le point M_0 où l'on franchit la surface.

49. — Continuité des composantes tangentielles. — Les composantes tangentielles varient continûment quand on franchit la

surface. C'est ce que nous allons montrer en étudiant l'une d'elles, X, par exemple. X a pour expression :

$$X = \int \frac{\mu'(x'-x)\,dx'dy'}{r^3 \cos\varphi};$$

cette intégrale n'est étendue qu'à S'_0, puisque, pour l'étude des discontinuités, on peut substituer S_0 à S.

Comparons-la à la suivante :

$$X' = \int_{(S'_0)} \frac{\mu'(x'-x)\,dx'dy'}{r'^3 \cos\varphi};$$

X' est une des composantes de l'attraction d'une surface plane, la portion S'_0 du plan des xy, sur laquelle serait répandue de la matière attirante avec une densité égale à $\dfrac{\mu'}{\cos\varphi}$.

Etudions la différence X — X' :

$$X - X' = \int_{(S'_0)} (x'-x) \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) dx'dy'.$$

Nous allons faire voir que c'est une fonction continue de x,y,z. On a :

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

$$= \frac{r'-r}{rr'}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

$$= (r'-r)\left(\frac{1}{r^3 r'} + \frac{1}{r^2 r'^2} + \frac{1}{rr'^3}\right)$$

Cette relation permet de trouver une limite supérieure de

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right|.$$

On a en effet :

$$|\, r' - r \,| < z',$$

car r, r′, z′ sont trois côtés d'un triangle PP′M. De plus :

$$\frac{1}{r^3 r'} < \frac{1}{r'^4} + \frac{1}{r^4},$$

$$\frac{1}{r^2 r'^2} < \frac{1}{r'^4} + \frac{1}{r^4},$$

$$\frac{1}{r r'^3} < \frac{1}{r'^4} + \frac{1}{r^4},$$

et par suite :

$$\left| \frac{1}{r^3 r'} + \frac{1}{r^2 r'^2} + \frac{1}{r r'^3} \right| < \frac{3}{r'^4} + \frac{3}{r^4},$$

et, enfin,

$$\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right| < z' \left(\frac{3}{r'^4} + \frac{3}{r^4} \right).$$

Transformons encore cette inégalité, en nous servant des remarques et des notations du paragraphe **41**.

On a :

$$\frac{r}{r'} < C,$$

d'où

$$\frac{1}{r'} < C \frac{1}{r},$$

et

$$\frac{1}{r'^4} < C^4 \frac{1}{r^4},$$

ou

$$\frac{3}{r'^4} < 3C^4 \frac{1}{r^4}.$$

Donc :

$$\frac{3}{r^4} + \frac{3}{r'^4} < (3C^4 + 1) \frac{1}{r^4},$$

ou bien, en posant $3C^4 + 1 = E$:

$$\frac{3}{r^4} + \frac{3}{r'^4} < \frac{E}{r^4}.$$

Posons :

$$F = (x' - x) \frac{\mu'}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

On a :

$$|F| < \gamma |x' - x| \left| \frac{Ez'}{r^4} \right| < \gamma ED \left| \frac{x' - x}{r^2} \right|,$$

car :

$$\left| \frac{z'}{r^2} \right| < D.$$

Enfin remarquons que $\left| \frac{x' - x}{r^2} \right| < 1$; nous pouvons écrire :

$$(1) \qquad |F| < \frac{\gamma ED}{r}.$$

Prenons alors l'intégrale X — X'; nous avons appelé F la fonction sous le signe $\int$.

Posons :

$$F = \frac{\Phi}{r};$$

l'intégrale devient :

$$X' - X = \int \frac{\Phi}{r} \, dx' dy';$$

or, en vertu de l'inégalité (1), on voit que la fonction Φ est limitée, car :

$$|\Phi| < \gamma ED.$$

Donc l'intégrale X' — X est absolument convergente et représente une fonction continue (42).

50. Cela établi, étudions X' et démontrons que X' est continue; nous aurons ainsi démontré que X l'est aussi. L'étude de X est par là ramenée à celle de X'; nous avons ainsi substitué, à l'étude de la composante pour une surface quelconque, l'étude de la composante pour une surface plane à densité variable $\frac{\mu'}{\cos \varphi}$.
Ramenons ce cas lui-même au cas où la densité est constante.

L'intégrale X' peut s'écrire :

$$X' = \int \frac{x' - x}{r'^3} \mu dx'dy' + \int \frac{x' - x}{r'^3} \left(\frac{\mu'}{\cos \varphi} - \mu \right) dx'dy'.$$

Appelons J_1 la première intégrale et J_2 la seconde :

$$X' = J_1 + J_2.$$

L'intégrale J_2 est de la forme $\int \frac{\Phi}{r'} dxdy$, si l'on pose :

$$\Phi = \frac{x' - x}{r'^2} \left(\frac{\mu'}{\cos \varphi} - \mu \right) = \frac{x' - x}{r'} \frac{1}{r'} \left(\frac{\mu'}{\cos \varphi} - \mu \right).$$

On voit, sans peine, que la fonction Φ est limitée, car :

1° $$\left| \frac{x' - x}{r'} \right| < 1.$$

2° On peut trouver un nombre K tel que :

$$\frac{\left| \frac{\mu'}{\cos \varphi} - \mu \right|}{r'} < K;$$

cela résulte de ce que le numérateur du premier membre a pour partie principale, quand x' et y' sont infiniment petits, un terme de la forme :

$$ax' + by',$$

et cela même tient à la remarque déjà faite (40) que le terme tout connu du développement de $\frac{\mu'}{\cos \varphi}$, suivant les puissances croissantes de x' et y', est le nombre μ lui-même.

La fonction Φ est donc finie et, par conséquent, l'intégrale J_2 est une fonction continue.

Le problème est ainsi ramené à l'étude de J_1, c'est-à-dire au cas d'une surface plane de densité constante μ.

Cette surface plane est ici S'_0 ; nous savons qu'on peut s'arranger de manière que S'_0 soit un cercle, ayant pour centre M_0. L'énoncé de la proposition à démontrer est donc réduit au suivant.

Soit (fig. 36) une aire plane attirante, de densité constante μ, limitée par une circonférence C, dont le centre est M_0. Soit un point M, voisin du plan du cercle et tendant vers le point M_0 sur la droite MM_0; on considère l'attraction en M et la composante de cette attraction parallèle à une droite fixe x'x du plan du cerc :le lorsque le point M tend vers M_0 et traverse le plan, cette composante reste continue.

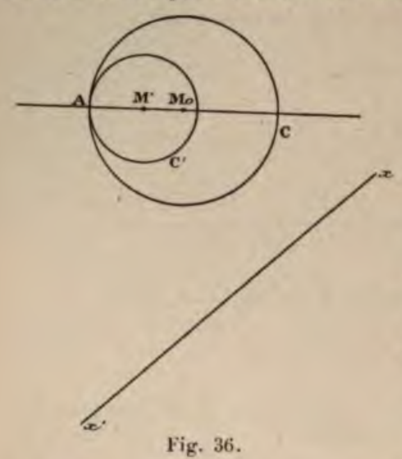


Fig. 36.

Pour démontrer cette proposition, désignons par M' la projection de M sur le plan du cercle et, du point M' comme centre, décrivons une circonférence C' tangente, intérieurement à la précédente.

Désignons par S, S', S'' les aires comprises respectivement: à l'intérieur de C, à l'intérieur de C', entre C et C'; appelons A, A', A'' les composantes correspondantes de l'attraction en M. On a :

$$A = A' + A'',$$

mais, par raison de symétrie :

$$A' = 0.$$

Donc :

$$A = A''.$$

Or, quand M tend vers M_0, M' tend aussi vers M_0 et l'aire S'' tend vers zéro; donc A'' tend vers zéro. Cette composante reste donc continue quand M traverse le plan en M_0; il en est alors de même de J_1. L'intégrale X', qui est la somme de deux fonctions continues, reste aussi continue, et enfin X jouit de la même propriété.

Il est donc établi en général que : *Les composantes tangentielles de l'attraction restent continues quand on traverse la surface.*

Remarque. — Plaçons-nous dans le cas général.

Quand M tend vers M_0, z tendant vers zéro, X a une limite indépendante du côté de la surface où se trouve le point M.

Appelons Ξ_0 cette limite. D'autre part, prenons la valeur de l'intégrale au point M_0, c'est-à-dire en y faisant brusquement $z = 0$. On sait (**28**) que l'on obtient ainsi une intégrale convergente et qu'on la calcule, en entourant le point M_0 d'une courbe C que l'on fait ensuite évanouir. La limite ainsi obtenue est-elle égale à Ξ_0? Cette question n'a pas de sens précis, car l'intégrale convergente qui fournit la valeur de X au point M_0 est semi-convergente. Sa limite dépend donc de la succession des formes que prend la courbe C en venant s'évanouir au point M_0.

Cependant, parmi ces valeurs, on peut en distinguer une que l'on appelle *valeur principale* et que l'on obtient en faisant évanouir la courbe C, de manière qu'elle se projette toujours sur le plan des xy, suivant une circonférence ayant M_0 pour centre. Désignons par X_0 cette valeur principale, on peut démontrer que l'on a :

$$\Xi_0 = X_0.$$

Je me contente d'indiquer le résultat sans le démontrer.

51. Prenons des axes rectangulaires quelconques et résumons rapidement les résultats de toute cette étude. Supposons que le point M vienne traverser la surface, au point M_0, où la densité est μ ; soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en ce point M_0. Au lieu des composantes de l'attraction, considérons, ce qui revient au même, les dérivées premières du potentiel.

La dérivée suivant la normale $\frac{dV}{dn}$, fait un saut brusquede $4\pi\mu$.

Les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ font des sauts brusques, égaux respectivement à $4\alpha\pi\mu$, $4\beta\pi\mu$, $4\gamma\pi\mu$ et les valeurs principales sur la surface, en M_0, des intégrales qui représentent ces dérivées sont égales respectivement à la moyenne arithmétique des valeurs obtenues en faisant tendre M vers la surface au-dessus et au-dessous.

52. Remarque sur les dérivées du potentiel d'un volume attirant. — Soit T un volume attirant, S la surface qui le limite; son potentiel est :

$$V = \int_{(T)} \frac{\mu' d\tau'}{r}.$$

L'une de ses dérivées, $\frac{\partial V}{\partial x}$, par exemple, est donnée par :

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \int_{(T)} \frac{\partial \mu'}{\partial x'} \frac{1}{r} d\tau' + \int_{(S)} \frac{-\alpha\mu'}{r} d\omega'.$$

C'est la somme de deux potentiels, l'un de volume, l'autre de surface (**36**). Les dérivées premières de V sont donc continues quand on franchit la surface S.

Si, maintenant, on prend les dérivées de $\frac{\partial V}{\partial x}$, on voit, en considérant le second membre, que les dérivées du potentiel de volume (première intégrale) restent continues en vertu de la remarque précédente; mais les dérivées du potentiel de surface (deuxième intégrale) éprouvent des discontinuités. Les dérivées secondes du potentiel V éprouvent des discontinuités. Elles se calculent sans peine. Les sauts brusques sont :

$$\text{pour } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} : 4\alpha^2\pi\mu,$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} : 4\alpha\beta\pi\mu,$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} : 4\beta\gamma\pi\mu,$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} : 4\alpha\gamma\pi\mu,$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} : 4\beta^2\pi\mu.$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} : 4\gamma^2\pi\mu.$$

Le laplacien ΔV fait un saut brusque de $4\pi\mu$, ce que nous avait montré déjà l'équation de Poisson.

53. Cas singuliers. — Dans l'étude des surfaces attirantes, nous avons fait deux hypothèses.

1° Le point M_0 est un point ordinaire de la surface et elle y possède un plan tangent bien déterminé.

2° z' est développable suivant les puissances croissantes de x', y'.

Nous avons vu que, dans ces conditions, les composantes éprouvent des discontinuités, mais restent finies.

Il n'en est pas de même, si on supprime ces hypothèses. En voici deux exemples.

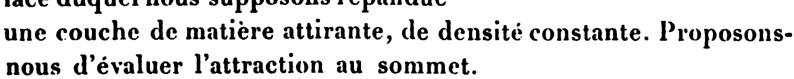


Fig. 37.

1° *Surface conique.* — Soit un cône droit SA_0B_0 (fig. 37), sur la surface duquel nous supposons répandue une couche de matière attirante, de densité constante. Proposons-nous d'évaluer l'attraction au sommet.

Sur l'une des génératrices SA_0 prenons les longueurs :

$$SA_1 = \frac{1}{2} SA_0$$

$$SA_2 = \frac{1}{2} SA_1 = \frac{1}{4} SA_0,$$

$$SA_3 = \frac{1}{2} SA_2 = \frac{1}{8} SA_0,$$

.....

$$SA_n = \frac{1}{2} SA_{n-1} = \frac{1}{2^n} SA_0, \quad \text{etc.}$$

.....

Par les points de division $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ menons des plans parallèles à la base $A_0 B_0$. Nous partageons ainsi la surface du cône en portions, dont le nombre est illimité ; leurs attractions newtoniennes, au sommet du cône, sont égales ; leur somme, qui est l'attraction du cône entier, est donc infinie.

2° *Bord d'une surface attirante.* — Soit une surface attirante ayant la forme d'un demi-cercle ; supposons-y la densité cons-

tante. Soit (fig. 38) $A_0 B_0$ le diamètre et A_0MB_0 la demi-circonférence, qui limitent ce demi-cercle. Proposons-nous d'évaluer l'attraction du demi-cercle au centre O de la circonférence.

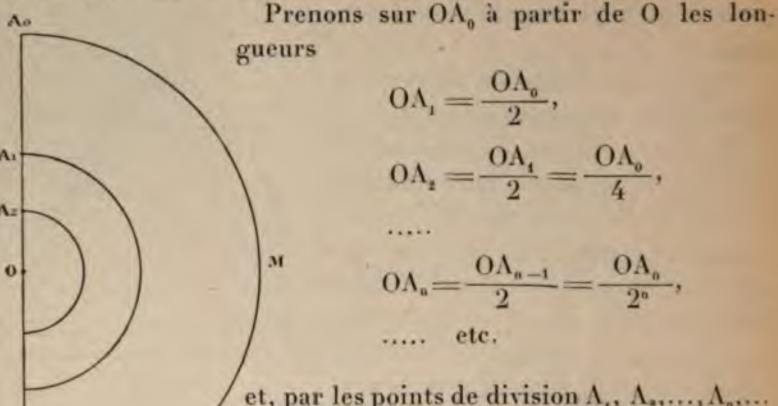


Fig. 38.

Prenons sur OA_0 à partir de O les longueurs

$$OA_1 = \frac{OA_0}{2},$$

$$OA_2 = \frac{OA_1}{2} = \frac{OA_0}{4},$$

.....

$$OA_n = \frac{OA_{n-1}}{2} = \frac{OA_0}{2^n},$$

..... etc.

et, par les points de division $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ traçons des demi-circonférences concentriques à la grande et limitées au même diamètre. On partage ainsi le demi-cercle en demi-couronnes, dont le nombre est illimité et qui ont toutes même action au centre O. L'attraction totale est donc infinie.

54. Potentiel logarithmique d'une ligne attirante. — Tous les résultats obtenus, dans l'étude des surfaces attirantes, s'étendent au potentiel logarithmique d'une ligne attirante plane.

La composante tangentielle reste continue, quand on traverse la ligne ; la composante normale fait un saut brusque de $2\pi\mu$, quand le point attiré traverse la ligne, en un point où la densité est μ. Quant au potentiel, il n'éprouve aucune discontinuité.

55. Remarque sur un lemme fondamental dans la théorie des surfaces attirantes. — Un lemme a joué, dans toute cette théorie, un rôle fondamental. C'est le suivant :

L'intégrale

$$\int \frac{f(x',y')\,dx'dy'}{r},$$

est une fonction continue de x, y, z, si la fonction f reste limitée en tout point du champ d'intégration (42).

Nous avons fait usage aussi du lemme suivant. L'intégrale

$$\int_0^{Z} \frac{f(x,z)\,dx}{\varphi(x)},$$

tend vers $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\varphi(x)}$, quand z tend vers zéro et que Z augmente indéfiniment, pourvu que certaines conditions énumérées au paragraphe **43** soient remplies.

Ces deux lemmes sont des cas particuliers du théorème suivant.

Théorème. — Soit l'intégrale :

$$\int_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy,$$

étendue à un certain domaine S.

Supposons :

1° Que le contour C qui limite S ne dépende pas de z.

2° Que l'on ait en tout point de S :

$$f(x,y,z) < \varphi(x,y),$$

φ étant une fonction positive.

3° Que l'intégrale

$$\int \varphi\,dxdy,$$

étendue au domaine S, ait un sens.

4° Enfin, que l'on ait

$$\text{Lim}_{z=0}\, f(x,y,z) = f(x,y,0),$$

quels que soient x et y, pourvu qu'ils restent fixes.

Dans ces conditions, on a la relation :

$$\text{Lim}_{z=0}\int_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy = \int_{(S)} f(x,y,0)\,dxdy.$$

LIGNES ATTIRANTES

56. Potentiel newtonien d'une ligne attirante. — Soit (fig. 39) L une ligne attirante, μ' la densité linéaire variable d'un point à

l'autre de cette ligne. Soit, en outre, M_0 un point de L et M un point extérieur à L, mais situé dans le plan normal à la courbe mené par M_0. Nous nous proposons de voir ce que devient le potentiel newtonien, en M, lorsque ce point tend vers M_0 en suivant la normale MM_0.

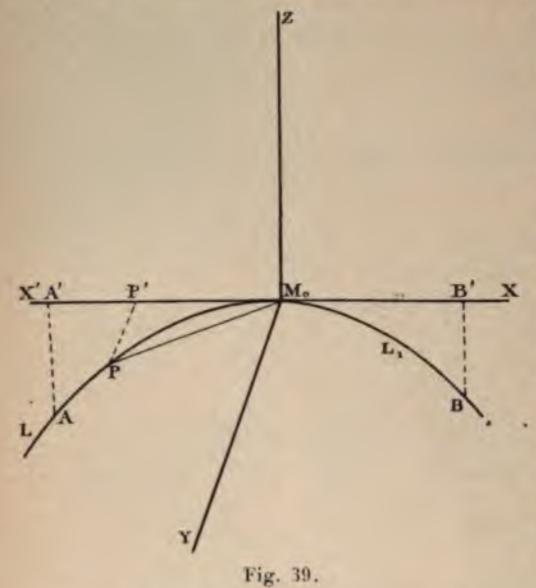


Fig. 39.

Appelons ds' un élément de longueur de la ligne L, P le centre de gravité de cet élément, r la distance MP ; le potentiel, en M, a pour expression l'intégrale curviligne :

$$V = \int \frac{\mu' ds'}{r},$$

étendue à tous les éléments ds' de L. Pour l'étudier, prenons pour origine des coordonnées M_0, pour axe des X, la tangente en M_0, et des axes rectangulaires. Appelons 0, y, z les coordonnées de M, x', y', z' celles de P ; projetons P en P' sur l'axe x'x ; les coordonnées de P' sont : x' 0, 0. Menons les droites M_0P, M_0P', MP, MP' et posons :

$$\begin{aligned}
\rho &= MM_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \text{ car } x = 0, \\
r &= MP = \sqrt{x'^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \\
r' &= MP' = \sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}, \\
r_0 &= M_0P = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\
r'_0 &= M_0P' = x'.
\end{aligned}$$

Partageons la ligne L en deux tronçons, L_1 et L_2, le point M_0 se trouvant entre les deux extrémités de L_1. Le potentiel V est la somme $V_1 + V_2$ des potentiels respectifs de L_1 et L_2 ; le potentiel V_2 de L_2 reste continu quand on traverse la ligne en M_0; il nous suffit donc d'étudier V_1.

Appelons φ l'angle de la tangente en ds' avec l'axe des x, on a :

$$ds' = \frac{dx'}{\cos\varphi} .$$

On peut choisir le tronçon L_1 assez court pour que, en chacun de ses points, on ait

$$\left| \frac{1}{\cos\varphi} \right| < K,$$

K étant un nombre fixe ; cela est possible, puisqu'au point M_0, on a : $\cos\varphi = 1$; si nous supposons, de plus, μ' fonction holomorphe de l'arc, on peut assigner sur L_1 une limite supérieure γ à $\frac{\mu'}{\cos\varphi}$ et écrire :

$$\left| \frac{\mu'}{\cos\varphi} \right| < \gamma.$$

Enfin on peut facilement montrer, comme nous l'avons fait dans l'étude des surfaces, que les rapports $\frac{r_0}{r}, \frac{r'}{r}, \frac{r}{r'}, \frac{z'}{r_0^{2'}} \frac{\sqrt{y'^2 + z'^2}}{r_0^2}$ restent finis ; appelons alors A,B,C,D des limites supérieures de ces rapports, il vient :

$$\frac{r_0}{r} < A ; \quad \frac{r'}{r} < B ; \quad \frac{r}{r'} < C ; \quad \frac{\sqrt{y'^2 + z'^2}}{r_0^2} < D.$$

Abordons maintenant l'étude de V_1.

57. V_1 peut s'écrire :

$$V_1 = \int \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r}.$$

Cette intégrale est étendue à la portion A'B' de l'axe des x, laquelle est la projection, sur cet axe, du tronçon de courbe $L_1 = AB$.

Comparons cette intégrale à la suivante :

$$V_1' = \int \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r'},$$

et à l'intégrale :

$$V_1'' = \int \frac{\mu dx'}{r'} .$$

Ces trois intégrales, étendues au même champ A′B′, représentent, toutes trois, les potentiels en M de la même portion de ligne droite A′B′. Mais, dans V_1, la densité est variable et d'une expression assez compliquée :

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi}\frac{r'}{r};$$

dans V_1', la densité est plus simple, mais variable encore : $\frac{\mu'}{\cos\varphi}$; enfin, dans V_1'', la densité est constante, elle a pour valeur celle de la densité μ qui existe, en M_0, dans la distribution primitive. Nous allons ramener l'étude de V_1 à celle de V_1', puis à celle de V_1''. A cet effet, écrivons V_1 de la manière suivante :

$$V_1 = \int \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)dx' + \int\left(\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu\right)\frac{dx'}{r'} + \int \mu'\frac{dx'}{r'},$$

ou, en appelant J_1 la première intégrale, J_2 la seconde, J_3 la troisième :

$$V_1 = J_1 + J_2 + J_3.$$

Étudions successivement ces trois intégrales. Commençons par J_1. Montrons que la quantité sous le signe $\int$ reste finie : $\frac{\mu'}{\cos\varphi}$ reste inférieur en module à γ; quant à $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$, on peut l'écrire :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{r' - r}{rr'}.$$

Or

$$|\, r' - r \,| < \sqrt{y'^2 + z'^2},$$

et

$$\frac{1}{rr'} < \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2},$$

donc

$$\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right| < \frac{\sqrt{y'^2 + z'^2}}{r^2} + \frac{\sqrt{y'^2 + z'^2}}{r'^2}.$$

Reportons-nous maintenant aux limites supérieures indiquées au paragraphe **56**; on voit que

$$\frac{\sqrt{y'^2+z'^2}}{r^2} < DA^2,$$

$$\frac{\sqrt{y'^2+z'^2}}{r'^2} < DA^2C^2.$$

Bref $\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right|$ est fini; la fonction, qui est sous le signe $\int$, dans J_1, est donc limitée.

Occupons-nous de J_2. La fonction sous le signe $\int$ est

$$\frac{\left(\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu\right)}{r'};$$

μ' étant une fonction holomorphe (**56**) de x', $\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu$ est développable, suivant les puissances croissantes de x'; il n'y a pas de terme tout connu, le développement commence par un terme du premier degré et le rapport suivant :

$$\frac{\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu.}{x'},$$

reste fini; soit α une limite supérieure de ce rapport, on peut écrire :

$$\left|\frac{\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu}{x'}\right| < \alpha,$$

et, par suite,

$$\left|\frac{\frac{\mu'}{\cos\varphi} - \mu}{r'}\right| < \alpha\left|\frac{x'}{r'}\right|.$$

Or :

$$\alpha\left|\frac{x'}{r'}\right| < \alpha\left|\frac{x'}{r}\right| C < \alpha C\left|\frac{x'}{r_0}\right| A < \alpha AC.$$

La fonction sous le signe $\int$, dans J_2, reste donc limitée.

Nous venons de démontrer que, dans J_1 et J_2, les fonctions sous le signe $\int$ sont limitées; montrons qu'on peut en conclure la continuité de ces deux intégrales, considérées comme fonctions de ρ. Faisons la démonstration pour J_1. Appelons J_1^0 la valeur de l'intégrale J_1 au point M_0 :

$$J_1^0 = \int \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0}\right) dx'.$$

Je dis que :

(1) $$\lim_{\rho=0} J_1 = J_1^0.$$

Posons, en effet,

$$M_0A' = a, \quad M_0B' = b;$$

les limites des intégrales J_1 et J_1^0 sont $-$ a et b :

$$J_1 = \int_{-a}^{b} \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) dx \quad \text{et} \quad J_1^0 = \int_{-a}^{b} \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0}\right) dx'.$$

Il nous suffit évidemment de démontrer la relation (1) pour les limites o et b, la même démonstration s'appliquant aux limites $-$ a et b.

Démontrons donc que :

$$\lim_{\rho=0} \int_0^b \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) dx' = \int_0^b \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0}\right).$$

Soit η, un nombre compris entre 0 et b; on a évidemment :

$$\int_0^b = \int_0^\eta + \int_\eta^b.$$

Posons :

$$v = \int_0^\eta \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r}, \qquad v' = \int_0^\eta \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r'},$$

$$u = \int_\eta^b \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r}, \qquad u' = \int_\eta^b \frac{\mu'}{\cos\varphi} \frac{dx'}{r'}.$$

Enfin, appelons v_0, v_0', u_0, u_0' les mêmes intégrales où l'on remplace r et r' par r_0 et r_0'. Alors, M désignant une limite supérieure de

$$\frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

on a :

$$|v - v'| < M\eta,$$
$$|v_0 - v'_0| < M\eta.$$

D'ailleurs, dans les potentiels u, u', u_0, u_0', le point M_0 n'est pas un des points attirants, puisque ces intégrales ont pour limites η et b.

Ces potentiels sont donc continus, au voisinage de M_0. Écrivons alors :

$$(2) \qquad \int_0^b \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)dx' - \int_0^b \frac{\mu'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)dx'$$
$$= (v - v') - (v_0 - v)_0' + (u - u_0) - (u' - u'_0),$$

et soit ε un nombre positif donné aussi petit qu'on le voudra ; nous pouvons choisir η de telle manière que :

$$M\eta < \frac{\varepsilon}{4};$$

alors on aura :

$$| v - v' - (v_0 - v_0) | < \frac{\varepsilon}{2};$$

η étant ainsi fixé, prenons ρ assez petit pour que :

$$| u - u_0 | < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$| u' - u'_0 | < \frac{\varepsilon}{4};$$

le premier membre de l'égalité (2) est ainsi rendu plus petit que ε. Il tend donc vers zéro, quand ρ tend vers zéro, et la proposition annoncée :

$$\lim_{\rho = 0} J_1 = J_1^0,$$

est démontrée.

J_1 est donc une fonction continue ; la même remarque s'applique à J_2.

Avant d'étudier J_3, faisons une autre remarque : J_1 n'est autre que $V_1 - V_1'$; démontrer que J_1, c'est-à-dire $V_1 - V_1'$, est continu, c'est ramener l'étude de la continuité de V_1 à celle de V_1' ; de même, J_2 est égal à $V_1' - V_1''$; le problème est ainsi ramené à l'étude de V_1'', qui n'est autre que l'intégrale J_3.

58. Étudions donc l'intégrale

$$J_3 = V_1'' = \int_{-a}^{b} \frac{\mu}{r'} dx';$$

μ étant constant, elle s'écrit :

$$\mu \int_{-a}^{b} \frac{dx'}{r'},$$

et a pour valeur :

$$2 \mu \log \frac{2\sqrt{ab}}{\rho}.$$

On a donc, pour V_1'', l'expression suivante obtenue en développant le logarithme :

$$V_1'' = -2\mu \log \rho + 2\mu \log 2\sqrt{ab}$$

et, pour V_1,

$$V_1 = -2\mu \log \rho + 2\mu \log 2\sqrt{ab} + (V_1^0 - V_1'^0) + (V_1'^0 - V_1''^0) + \Psi(\rho),$$

V_1^0, $V_1'^0$..... etc., étant les valeurs des intégrales au point M_0 et $\Psi(\rho)$, une quantité qui s'annule avec ρ.

Posons :

$$N = -2\mu \log 2\sqrt{ab} + (V_1^0 - V_1'^0) + (V_1'^0 - V_1''^0),$$

on aura :

$$V_1 = -2\mu \log \rho + N + \Psi(\rho).$$

On voit que le potentiel V_1 et, par suite, le potentiel V de la

A M₀ B

Fig. 40.

ligne entière augmentent indéfiniment, quand le point M s'approche indéfiniment d'un point M_0 de la ligne.

La quantité N, qui entre dans son expression, ne dépend pas de ρ ni, par suite, du point M, mais seulement des coordonnées du point M_0.

Calculons cette quantité dans deux cas particuliers : celui d'une droite homogène et celui d'une circonférence homogène.

Soit AB (fig. 40), un segment de droite attirante homogène de densité μ, les autres notations étant les mêmes que précédemment. On voit sans peine que l'expression

$$V_1^0 - V_1'^0 + (V_1'^0 - V_1''^0),$$

est égale à zéro ; la quantité N se réduit donc à

$$N = 2\mu \log 2\sqrt{ab},$$

a et b étant les longueurs M_0A et M_0B. Le potentiel prend alors la forme :

$$V_1 = + 2\mu \log \frac{2\sqrt{ab}}{\rho};$$

c'est l'expression que nous avions trouvée au paragraphe **14**.

Passons au cas plus important d'une circonférence homogène.

59. Cas d'une circonférence homogène. — Nous avons déjà (**17**) calculé le potentiel d'une circonférence homogène, en un point intérieur ou extérieur, à l'aide de la *moyenne arithmético-géométrique* de Gauss.

Voyons ce qui se passe, quand le point attiré M est très voisin de la circonférence.

Menons toujours (fig. 41) la normale MM_0 et appelons ρ la longueur MM_0 ; soit, en outre, μ la densité de la matière attirante. Le potentiel, en M, est donné par l'expression :

(1) $$V = -2\mu \log \rho + N;$$

nous négligeons $\Psi(\rho)$ qui s'annule avec ρ.

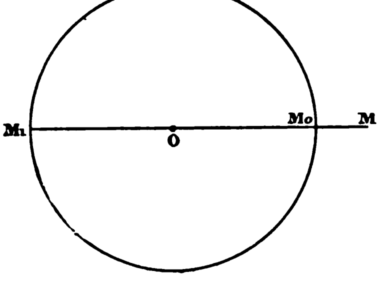


Fig. 41.

Nous avons dit que la quantité N ne dépend pas des coordonnées du point M, mais peut seulement dépendre de celles du point M_0 ; ici, en vertu de la symétrie, N ne dépend même pas de la position de M_0 et, par suite, son expression ne doit contenir que la densité μ et le rayon a du cercle ; voyons de quelle manière μ et a entrent dans N.

Le potentiel V envisagé sous sa forme ordinaire

$$(2) \qquad V = \int \mu \frac{ds'}{r},$$

est manifestement proportionnel à μ; mais, envisagé sous la forme (1), il se compose de deux termes, dont le premier est proportionnel à μ; le second, N, doit donc l'être aussi.

Cela posé, considérons encore V sous la forme (2); dans l'intégrale du second membre, μ est un nombre, ds' et r sont des longueurs; si l'on multiplie toutes les longueurs par un même nombre, le rapport $\frac{ds'}{r}$ ne change pas, V ne change donc pas non plus. Par conséquent, quelle que soit la forme de son expression, le potentiel V doit être homogène et de degré zéro par rapport aux longueurs qu'il contient; par exemple, si on l'exprime, comme dans la formule (1), en fonction de ρ et a, il ne doit contenir que le rapport de ces deux longueurs.

D'après tout cela, V doit être nécessairement de la forme suivante :

$$(3) \qquad V = -2\mu \log \frac{\rho}{a} + K\mu,$$

K étant un nombre, indépendant par conséquent des quantités ρ, a et μ.

Pour achever le calcul de V, il nous reste à calculer K.

Nous nous servirons pour cela des résultats établis antérieurement (**17** et **18**). Soit M_1 le point où MM_0 perce de nouveau la circonférence; posons :

$$\delta = MM_1,$$

et appelons $\varphi(\rho, \delta)$ l'inverse de la moyenne arithmético-géométrique de ρ et δ; on a (18) :

$$V = 2\pi\mu a \varphi(\rho, \delta).$$

Considérons le plan P, perpendiculaire au plan de la circonférence et passant par M_1M_0; prenons ce plan P comme plan du tableau (fig. 42). Si le point M sort du plan primitif et se déplace dans P sur une deuxième circonférence, tracée dans ce plan du

point M_0 comme centre, avec ρ pour rayon, la formule (3) montre que V ne change pas ; dans ce mouvement, δ varie depuis $2a + \rho$ jusqu'à $2a - \rho$. Donnons alors à M une position telle que ρ

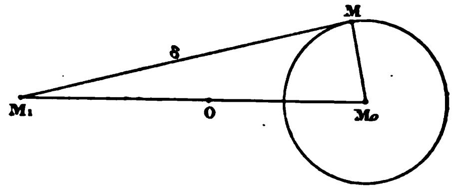


Fig. 42.

prenne la valeur 2a et calculons le potentiel, en M, dans ces conditions. On a :

$$V = 2\pi\mu a\varphi(\rho, 2a).$$

Rapprochons cette formule de la formule (3) et égalons les deux expressions de V, il vient :

$$2\pi\mu a\varphi(\rho, 2a). = -2\mu \log \frac{\rho}{a} + K\mu;$$

d'où :

(4).... $$\varphi(\rho, 2a) = \frac{1}{\pi a} \log \frac{a}{\rho} + \frac{K}{2\pi a}.$$

Donnons maintenant à a un accroissement $\theta\rho$ dépendant de ρ et s'annulant avec lui ; on vérifie, sans peine, que $\varphi(\rho, a)$ prend un accroissement qui s'annule aussi avec ρ ; comme nous négligeons les termes qui s'annulent avec ρ, nous pourrons négliger cet accroissement et considérer comme égales les deux expressions $\varphi(\rho, a)$ et $\varphi(\rho, a + \theta\rho)$.

Cela posé, observons que, $\varphi(\rho, 2a)$ étant l'inverse de la moyenne arithmético-géométrique de Gauss, on ne change pas sa valeur en remplaçant ρ et 2a respectivement par leurs moyennes arithmétique et géométrique ; on a donc

$$\varphi(\rho, 2a) = \varphi\left(a + \frac{\rho}{2}, \sqrt{2a\rho}\right).$$

Or, en vertu de la remarque précédente, on a :

$$\varphi\left(a + \frac{\rho}{2}, \sqrt{2a\rho}\right) = \varphi(a, \sqrt{2a\rho}),$$

et, comme, dans l'expression de φ, on peut intervertir l'ordre des variables sans changer φ, on a aussi :

$$\varphi\left(a+\frac{\rho}{2}, \sqrt{2a\rho}\right)=\varphi(\sqrt{2a\rho}, a);$$

on peut donc écrire :

$$(5)\ldots\ldots \qquad \varphi(\rho, 2a) = \varphi(\sqrt{2a\rho}, a).$$

Reportons-nous à l'égalité (1) et changeons-y ρ en $\sqrt{2a\rho}$ et $2a$ en a, cette égalité deviendra :

$$(6)\ldots\ldots \varphi(\sqrt{2a\rho}, a) = \frac{2}{\pi a}\log\frac{a}{2\sqrt{2a\rho}}+\frac{K}{\pi a}.$$

Comparons maintenant les égalités (4) et (6) ; les seconds membres de ces égalités doivent être égaux, puisque les deux premiers le sont, en vertu de l'égalité (5) ; on a donc :

$$\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{\rho}+\frac{K}{2\pi a}=\frac{2}{\pi a}\log\frac{a}{2\sqrt{2a\rho}}+\frac{K}{\pi a},$$

ce qui peut s'écrire, en transformant le second membre de cette nouvelle relation :

$$\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{\rho}+\frac{K}{2\pi a}=\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{8\rho}+\frac{K}{\pi a},$$

ou encore :

$$\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{\rho}+\frac{K}{2\pi a}=\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{\rho}-\frac{1}{\pi a}\log 8+\frac{K}{\pi a}.$$

$\frac{1}{\pi a}\log\frac{a}{\rho}$ disparaît et l'on tire finalement :

$$K = 2\log 8.$$

Le calcul de V s'achève, en portant cette valeur de K dans l'expression de V :

$$V = 2\mu\log\frac{8a}{\rho}.$$

Telle est la valeur approchée du potentiel, quand ρ est très petit.

CHAPITRE IV

LA FONCTION DE GREEN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

60. Théorème de la moyenne de Gauss. — Soit V une fonction des trois variables x, y, z, continue ainsi que ses dérivées premières dans un certain domaine; supposons que ses dérivées secondes existent et soient généralement continues, les discontinuités, s'il y en a, se trouvant sur des surfaces algébriques d'ailleurs quelconques.

Soit, en outre, M_0 un point de ce domaine et Σ une sphère, ayant pour centre M_0 et située dans le domaine considéré ; on appelle *moyenne* de la fonction V sur cette sphère l'expression :

$$M = \frac{\int V d\omega}{4\pi r^2},$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de la sphère et r étant le rayon de cette sphère. Soit enfin V_0 la la valeur de V au point M_0.

Le théorème de la moyenne de Gauss est le suivant : Si la fonction V satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0,$$

en tout point du domaine, on a la relation :

$$M = V_0,$$

quel que soit r.

Pour démontrer ce théorème, changeons de variables et passons en coordonnées polaires; les formules de transformation sont :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

l'origine primitive et la nouvelle étant toutes deux au centre M. de Σ et les courbes

$$\varphi = \text{const}, \quad \theta = \text{const},$$

désignant les méridiens et les parallèles de la sphère.

Partageons la sphère en éléments de surface très petits, $d\omega$, à l'aide de ces deux systèmes de courbes; on a :

$$d\omega = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

et l'expression de M devient :

$$M = \int \frac{V r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \int V \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

les limites de cette dernière intégrale étant :

pour φ : 0 et 2π,
pour θ : 0 et π.

Les limites étant constantes, on peut différentier sous le signe $\int$, et écrire :

$$\frac{dM}{dr} = \int \frac{\sin\theta}{4\pi} \frac{dV}{dr} \, d\theta \, d\varphi,$$

ou, en revenant aux anciennes variables,

$$\frac{dM}{dr} = \int \frac{dV}{dr} \frac{d\omega}{4\pi r^2},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dM}{dr} = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\omega}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \int \frac{dV}{dn} d\omega,$$

Mais on a vu (20) que l'on a, en désignant par T un volume et par S la surface qui le limite,

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = \int \Delta V d\tau,$$

la seconde intégrale étant étendue au volume T et la première à la surface S; cela a lieu sous certaines conditions de continuité, qui seront ici remplies, si nous prenons pour surface S la sphère

Σ et, pour volume T, l'intérieur de cette sphère. Mais, en chaque point de l'intérieur de la sphère, on a

$$\Delta V = 0,$$

donc

$$\int \Delta V d\tau = 0,$$

par suite,

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = 0,$$

et enfin

$$\frac{dM}{dr} = 0.$$

M est donc indépendant de r. Or, quand r tend vers zéro, les valeurs de V sur la sphère tendent vers V_0, l'intégrale $\int V d\omega$ tend vers $4\pi r^2 V_0$ et enfin M tend vers V_0; comme M est fixe, on doit constamment avoir $M = V_0$.

Le théorème de Gauss est donc démontré.

61. Fonctions harmoniques. — On appelle *fonction harmonique,* dans un domaine donné T, une fonction qui, dans ce domaine, possède les propriétés suivantes :

1° Elle est continue ;

2° Ses dérivées premières existent et sont continues ;

3° Ses dérivées secondes existent et sont généralement continues, les discontinuités, s'il y en a, se trouvant sur des surfaces algébriques quelconques ;

4° Elle satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0.$$

La fonction V considérée au paragraphe précédent est une fonction harmonique.

Voici une propriété importante de ces fonctions. Soient T un volume, S la surface qui le limite et V une fonction harmonique dans T. Puisqu'elle est continue, elle a un maximum qu'elle atteint pour un point du domaine. Je dis que ce point n'est pas à l'intérieur de T, mais sur S. Supposons, en effet, qu'il soit intérieur à T ; on peut l'entourer d'une sphère, ayant ce point pour centre et tout entière intérieure à T. En tout point de la sphère.

la valeur de V est inférieure au maximum V_0 ; l'intégrale $\int V d\omega$ est donc inférieure à $4\pi r^2 V_0$ et enfin la moyenne M est inférieure à V_0 ; mais, d'après le théorème précédent, on doit avoir $M = V_0$; il est donc impossible que V atteigne son maximum dans l'intérieur de T ; elle l'atteint sur la surface S. Pour les mêmes raisons, V a un minimum et elle l'atteint sur S.

On peut donc énoncer, en général, le théorème suivant :

Une fonction harmonique dans un domaine n'atteint son maximum et son minimum que sur la surface qui limite ce domaine.

On en conclut sans peine le corollaire suivant : Si une fonction harmonique est positive sur la surface, elle l'est dans le volume limité par cette surface.

Toutes ces propriétés sont vraies, que le domaine soit simplement ou multiplement connexe.

62. Le théorème qui précède nous permet de faire les remarques suivantes :

I. — Supposons le domaine T limité ; soient g le maximum d'une fonction V harmonique dans ce domaine et h son minimum, on a :

$$\text{sur la surface : } h \leq V \leq g,$$
$$\text{dans l'intérieur de T : } h < V < g.$$

II. — Supposons le domaine T constitué par toute la portion de l'espace extérieure à une surface S ; ce domaine s'étend depuis la surface jusqu'à l'infini. Décrivons une très grande sphère S′ entourant S. Soient g et h le maximum et le minimum sur S, g′ et h′ le maximum et le minimum sur S′ ; on a :

$$\text{sur S : } h < V < g,$$
$$\text{sur S}' : h' < V < g'.$$

Le maximum de V sera la plus grande des deux quantités g et g′, pour le volume compris entre ces deux surfaces ; le minimum, pour ce même volume, sera la plus petite des quantités h et h′.

Supposons maintenant que, S restant fixe, le rayon de S′ grandisse indéfiniment et que V s'annule à l'infini ; g′ et h′ tendent vers zéro. Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

1° Supposons h positif; g l'est aussi et, si S′ est assez grand, on a :

$$h' < h \text{ et } g' < g,$$

et, par suite,

$$g > V > h',$$

ou

$$g > V > 0,$$

dans tout l'espace extérieur à S.

2° Supposons

$$g > 0 > h,$$

on a :

$$g > g',$$
$$h < h',$$

et, dans tout l'espace extérieur à S :

$$g > V > h.$$

3° Supposons

$$0 > V > h,$$

on voit de la même façon que, dans tout l'espace extérieur à S, V est constamment négatif.

C'est un de ces trois cas qui se présente, pour le potentiel dû à des masses situées à distance finie.

III. Reprenons le cas d'un domaine limité compris à l'intérieur d'une surface S; on a les inégalités

$$g > V > h : \text{dans T},$$
$$g \geqq V \geqq h : \text{sur S}.$$

Si donc, en tout point de S, la fonction est nulle, elle est nulle aussi, en tout point de T.

IV. — Soit une fonction V, harmonique dans tout l'espace et s'annulant à l'infini. Je dis que l'on a $V \equiv 0$ dans tout l'espace. Traçons, en effet, une sphère de très grand rayon; les valeurs de V, à l'intérieur de la sphère, sont comprises entre le maximum g et le minimum h, lesquels sont atteints par la fonction sur la surface et tendent par suite vers zéro, quand le rayon de la sphère croît indéfiniment; V tend donc vers zéro, à l'intérieur de la

sphère et, comme sa valeur en chaque point est bien déterminée, on a nécessairement $V \equiv 0$ dans tout l'espace.

63. Ce qui précède nous permet de trouver les propriétés caractéristiques de la fonction potentielle (cas de l'attraction newtonienne), c'est-à-dire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction représente un potentiel newtonien.

Soit une fonction V satisfaisant aux conditions suivantes :

1° V est continue dans tout l'espace.

2° Ses dérivées premières existent et sont continues, à l'intérieur et à l'extérieur d'une surface S donnée ; mais, quand on franchit la surface, elles éprouvent des discontinuités ; elles tendent vers des limites différentes, mais bien déterminées, quand on tend vers la surface soit par l'intérieur, soit par l'extérieur, et ces limites sont telles que, seule, la dérivée prise suivant la normale éprouve une discontinuité à la traversée, les dérivées tangentielles de S restant continues.

3° A l'extérieur de S, on a

$$\Delta V = 0.$$

4° A l'intérieur, ΔV est quelconque.

5° V s'annule à l'infini.

Ces conditions sont évidemment nécessaires pour définir un potentiel newtonien, puisque tout potentiel newtonien les possède. Nous allons montrer qu'elles sont suffisantes, c'est-à-dire qu'elles définissent une fonction et que cette fonction est un potentiel.

Appelons T le volume enfermé dans S. En tout point de T, ΔV est quelconque, mais donné ; posons :

$$\Delta V = \varphi(x, y, z),$$

φ étant une fonction donnée.

Considérons alors la fonction V_1 :

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi(x', y', z')}{r}\, d\tau' ;$$

c'est un potentiel de volume, où φ désigne la densité. On a évidemment, en tout point x, y, z du volume T,

$$\Delta V_1 = \varphi(x, y, z).$$

Soit maintenant $\psi(x, y, z)$ une fonction définie sur la surface S et exprimant, en chaque point, le saut brusque de la dérivée de V suivant la normale ; puis posons :

$$V_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\psi(x', y', z')}{r} \, d\omega',$$

cette intégrale double étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de S. La fonction V_2 satisfait à la deuxième condition imposée à la fonction V, car c'est un potentiel de surface où la densité est représentée par la fonction ψ.

La somme des deux potentiels : $V_1 + V_2$, remplit toutes les conditions imposées à la fonction V ; on peut donc la prendre pour fonction V.

Montrons que cette fonction est unique.

Supposons, pour un instant, qu'il y en ait une seconde V'; considérons la différence

$$V' - (V_1 + V_2).$$

Elle remplit les conditions suivantes :

1° Elle est continue, dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre ;

2° Elle satisfait, dans tout l'espace, à l'équation de Laplace. Cette différence est donc une fonction harmonique dans tout l'espace ;

3° Elle s'annule à l'infini.

En vertu de la Remarque IV du paragraphe précédent, elle est identiquement nulle ; donc la fonction $V_1 + V_2$ est unique.

Bref les cinq conditions énumérées plus haut sont suffisantes pour définir un potentiel et ne définissent pas d'autre fonction. Ce sont bien les propriétés caractéristiques cherchées.

Remarque. — Comme on le voit d'après les énoncés mêmes, il ne s'agit, dans tout ceci, que des potentiels de surface et de volume. Ceux de ligne, par exemple, sont exclus.

Les propriétés que nous venons d'établir ont une grande importance pour tout ce qui va suivre.

64. Problème de Dirichlet. — Problème intérieur. — Problème

extérieur. — Le *problème intérieur de Dirichlet* s'énonce ainsi :

Soit un volume T limité par une surface S. Trouver une fonction V des trois variables x, y, z satisfaisant aux conditions suivantes :

1° En tout point de T, elle est continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres ;

2° En tout point de T, elle satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0;$$

3° Sur la surface S, elle se réduit à une fonction donnée U des coordonnées.

On peut démontrer les deux théorèmes suivants :

I. — Si le problème intérieur de Dirichlet comporte une solution, il n'en comporte qu'une.

Supposons, en effet, pour un instant, qu'il en comporte deux ; soient V et V′ les deux fonctions ainsi obtenues. On a :

$$\Delta V = 0 \text{ dans T}, \ \Delta V' = 0 \text{ dans T},$$
$$V = U \text{ sur S}, \ V' = U \text{ sur S}.$$

Posons :

$$V - V' = F.$$

La fonction F satisfait aux conditions suivantes :

$$\Delta F = 0, \text{ dans T},$$
$$F = 0, \text{ sur S}.$$

Par conséquent, en vertu d'un théorème démontré au paragraphe précédent, on a partout, dans T, $F = 0$ et, par suite, $V \equiv V'$: il ne peut donc pas exister deux solutions distinctes du problème énoncé.

II. — Le problème comporte toujours une solution. Cet énoncé est connu sous le nom de *principe de Dirichlet.*

Nous nous en occuperons dans un autre chapitre.

Voici maintenant l'énoncé du *problème extérieur de Dirichlet.*

On donne une surface fermée S et l'on considère l'espace extérieur à S, c'est-à-dire l'espace qui s'étend depuis cette sur-

face jusqu'à l'infini. On demande de trouver une fonction V satisfaisant aux conditions suivantes :

1° En tout point de l'espace considéré, la fonction V est continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres ;

2° En tout point du même espace, elle satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0;$$

3° Sur la surface S, elle se réduit à une fonction donnée U des coordonnées ;

4° Elle s'annule à l'infini.

On démontre, comme dans le cas du problème intérieur :

I. Que, s'il y a une solution, il n'y en a qu'une ;

II. Qu'il y en a toujours une.

65. Extension au cas de deux variables. — Les définitions et théorèmes qui précèdent s'étendent au cas de deux variables sans difficulté.

La définition des fonctions harmoniques est la même ; il suffit de remplacer les mots volume et surface par aire plane et contour.

Le théorème de Gauss pour une fonction harmonique devient :

$$V_0 = \frac{1}{2\pi r}\int V ds;$$

la sphère a été remplacée par un cercle, sa surface par une circonférence, son aire $4\pi r^2$ par la longueur $2\pi r$ de la circonférence, l'intégrale double $\int V d\omega$ par l'intégrale curviligne $\int V ds$.

Les remarques sur les limites supérieure et inférieure des fonctions harmoniques se généralisent immédiatement et la modification, dans chaque cas, pour transposer les énoncés, est évidente.

Cependant les considérations faites dans le paragraphe 62 (II), à propos des fonctions harmoniques à l'extérieur d'un domaine donné et à propos du potentiel newtonien, ne se généralisent pas. Cela tient à ce que le potentiel logarithmique ne s'annule pas à l'infini comme le potentiel newtonien.

Voyons ce qui se passe, dans ce cas.

Soit un contour plan C, entouré d'un cercle de très grand rayon C' ; considérons le potentiel logarithmique d'une certaine distribution linéaire de matière attirante sur le contour C et d'une certaine distribution superficielle de matière dans l'aire plane qu'enferme le contour C ; donnons à g, h, g', h' des significations analogues à celles qu'elles ont au paragraphe 62. Enfin reprenons pour le potentiel logarithmique les notations données au début de ce cours. On sait que l'expression :

$$V - M \log \frac{r_0}{\rho},$$

tend vers zéro, quand ρ croît indéfiniment ; si donc M est différent de zéro, V augmente indéfiniment et, sur le cercle C', $|V|$ est très grand quand le rayon de C' est très grand ; faisons grandir ce rayon indéfiniment, nous devons distinguer plusieurs cas :

1° $M > 0$;

alors g' et h' tendent vers $-\infty$ et l'on a, dans tout le domaine,

$$V < g.$$

2° $M < 0$;

alors g' et h' tendent vers $+\infty$ et l'on a, dans tout le domaine,

$$V > h.$$

3° $M = 0$.

Alors V s'annule à l'infini, on retombe dans le cas du potentiel newtonien et l'on a à distinguer les trois inégalités vues dans ce cas.

66. Remarque sur le potentiel newtonien. — Supposons que V désigne, non pas une fonction harmonique, mais un potentiel newtonien de volume, et essayons de reprendre les raisonnements faits pour établir le théorème de la moyenne.

Nous aurons :

$$\frac{dM}{dr} = \frac{\int \Delta V d\tau}{4 \pi r^2}.$$

Supposons que le point O soit intérieur aux masses agissantes et que la densité soit positive, alors on a :

$$\Delta V < 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dM}{dr} < 0,$$

ou enfin :

$$M < V_0.$$

On en conclut qu'au voisinage de O, V peut être inférieur à V_0; en tout cas, il ne se peut pas qu'il lui soit partout supérieur.

Bref, V peut avoir un maximum au sein des masses agissantes, mais il ne peut pas avoir de minimum.

Soient T le volume, S la surface limite, g et h le maximum et le minimum de V sur elle ; on a :

$$g > V > h \text{ sur S.}$$

On est sûr que l'on a, dans T :

$$V > h$$

mais on ne sait pas si l'on a :

$$g > V.$$

67. Conséquences de la formule de Green. — Reportons-nous au paragraphe **19** et reprenons les notations de ce paragraphe. Nous avons démontré en général la formule

$$(1)\ldots \int_{(T)} (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau = -\int_{(S)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega \;;$$

les fonctions U et V et leurs dérivées doivent satisfaire, dans le volume T et sur la surface S, à certaines conditions de continuité que nous avons indiquées en établissant cette formule. Les dérivées $\frac{dV}{dn}$, $\frac{dU}{dn}$ sont prises vers l'intérieur de la surface S.

Faisons quelques applications de cette formule.

1° Supposons que U soit une fonction harmonique et V le potentiel d'un volume attirant T′ ; on a alors les relations suivantes :

$$\Delta U = 0, \text{ à l'intérieur de T,}$$
$$\Delta V = 0, \text{ à l'extérieur de T}',$$
$$\Delta V = -4\pi\mu, \text{ à l'intérieur de T}',$$

μ désignant la densité de la matière attirante dans le volume **T′**; l'intégrale $\int_{(T)}(U\Delta V - V\Delta U)d\tau$ devient alors :

$$-4\pi\int U\mu d\tau,$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$-4\pi\int U dm,$$

en appelant $dm = \mu d\tau$ la quantité de matière contenue dans l'élément $d\tau$. La formule (1) devient ainsi :

$$\int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\int U dm,$$

ce que l'on peut écrire, en donnant une autre forme au second membre,

$$\int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\Sigma mU,$$

la somme Σ portant sur toute la partie du volume T′ comprise dans le volume T.

2° Supposons maintenant que, U désignant toujours une fonc-

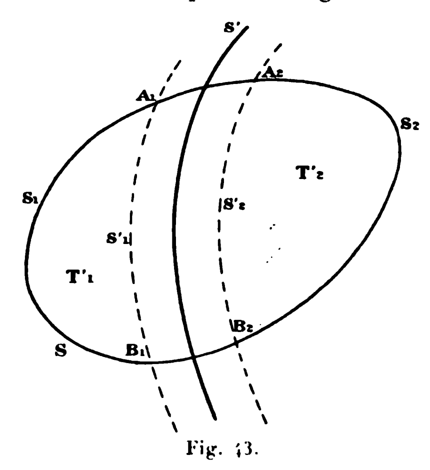


Fig. 43.

tion harmonique, V désigne un potentiel de surface. Représentons le volume T d'intégration, la surface S qui le limite (fig. 43) et la surface attirante S′, dont V est le potentiel. Voyons ce que devient

alors la formule (1). Ses deux membres sont nuls si S' est tout entière extérieure à S. Mais supposons que S' coupe S; elle partage ainsi le volume T en deux autres T_1 et T_2 et la surface S en deux parties S_1 et S_2. Traçons deux surfaces S'_1 et S'_2 de part et d'autre de S', parallèles à S' et très voisines d'elle. Le volume T est alors partagé en trois parties :

T_1' comprise entre S et S_1'
T'_2 comprise entre S et S'_2
T'' comprise entre les deux surfaces auxiliaires S'_1 et S'_2.

T'' est une étroite bande dont le volume tend vers zéro quand les deux surfaces S'_1 et S'_2 tendent vers S'.

Appliquons la formule (1) à chacun des tronçons du volume T et aux portions de surfaces qui limitent chacun d'eux. Pour les deux premiers, l'intégrale triple $\int (V\Delta U - U\Delta V)\, d\tau$ est nulle ; les intégrales doubles correspondantes sont donc nulles et l'on a

$$\int_{(A_1S_1B_1)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega + \int_{(A_1S'_1B_1)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega = 0$$

et

$$\int_{(A_2S_2B_2)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega + \int_{(A_2S'_2B_2)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega = 0.$$

Ajoutons et faisons passer dans le second membre les intégrales étendues à S'_1 et S'_2 ; il vient :

$$\int_{A_1S_1B_1} + \int_{A_2S_2B_2} = -\int_{A_1S'_1B_1} - \int_{A_2S'_2B_2}.$$

Si S'_1 et S'_2 tendent vers S', le premier membre tend vers $\int_{(S)}$; on a donc :

$$(2)\ldots \int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega = -\lim\left[\int_{A_1S'_1B_1}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega + \int_{A_2S'_2B_2}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\omega\right].$$

Les dérivées $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dU}{dn}$ suivant la normale sont prises inté-

rieurement aux volumes T'_1 et T'_2 ; par conséquent, dans le premier membre de cette relation, elles sont prises intérieurement au volume T et dans le second extérieurement au volume T″.

Calculons maintenant la limite de la somme des intégrales de ce second membre.

La surface S′ est la surface attirante ; la dérivée $\frac{dV}{dn}$ éprouve donc un saut brusque quand on franchit cette surface ; quant aux autres fonctions U, V, $\frac{dU}{dn}$, elles restent toutes continues. Appelons α la limite de $\frac{dV}{dn}$ sur S'_1 quand S'_1 tend vers S′ ; et β la limite de $\frac{dV}{dn}$ sur S'_2 quand S'_2 tend vers S′. Enfin désignons les limites de U, V, $\frac{dU}{dn}$ par les mêmes lettres U, V, $\frac{dU}{dn}$; on a :

$$(3)\ldots\ldots \lim \int_{A_1S'_1B_1} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega = \int U\alpha d\omega - \int V \frac{dU}{dn} d\omega ;$$

ces deux nouvelles intégrales sont étendues à la portion de S′ comprise dans T. Le sens de la normale dans $\frac{dU}{dn}$ est celui qui va vers S_1. On a encore :

$$(4)\ldots\ldots \lim \int_{A_2S'_2B_2} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega = \int U\beta d\omega - \int V \frac{dU}{dn} d\omega .$$

Le champ d'intégration pour ces deux dernières intégrales est encore la portion de S′ compris dans T. Le sens de la normale dans $\frac{dU}{dn}$ est celui qui va vers S_2. Additionnons les deux égalités (3) et (4) membre à membre ; les deux intégrales $\int V \frac{dU}{dn} d\omega$ se détruisent parce que les sens de la normale dans ces deux intégrales sont inverses l'un de l'autre. Il reste :

$$\lim \left[\int_{A_1S'_1B_1} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega + \int_{A_2S_2B_2} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega \right]$$
$$= \int_{(S')} U (\alpha + \beta) \, d\omega ,$$

et par conséquent, en vertu de la relation (2) :

$$(5)\ldots\ldots \quad \int_{(S)} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega = - \int_{S'} U (\alpha + \beta) \, d\omega .$$

Or appelons μ la densité de la matière attirante en chaque point de S'; il résulte de la théorie des surfaces attirantes que, si l'on désigne par $\frac{dV}{dn_e}$ la limite vers laquelle tend la dérivée prise suivant la normale extérieure quand on tend vers la surface par l'extérieur et par $\frac{dV}{dn_i}$ la limite de $\frac{dV}{dn}$ prise suivant la normale intérieure quand on tend vers la surface par l'intérieur, l'on a :

$$\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} = -4\pi\mu.$$

On a donc ici

$$\alpha + \beta = -4\pi\mu.$$

Bref, la relation (5) donne :

$$\int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\int U\mu d\omega.$$

C'est la même formule que dans le cas du potentiel de volume : on peut lui donner la même forme :

$$\int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\Sigma mU.$$

Cette formule s'étend donc à un potentiel de surface comme à un potentiel de volume; elle s'étend par suite au potentiel d'un ensemble de surfaces et de volumes attirants.

68. Cette formule s'applique encore si V désigne le potentiel d'une ligne attirante, de points attirants discrets ou d'un ensemble de volumes, de surfaces, de lignes et de points.

On peut donc énoncer en général le théorème suivant :

Si U désigne une fonction harmonique et V un potentiel newtonien, on a la relation :

$$(5)\ldots\quad \int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\Sigma mU,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ d'une surface fermée quelconque S et ΣmU ne s'étendant qu'aux masses situées à l'intérieur du volume T limité par la surface S.

Ce théorème constitue une forme nouvelle du théorème de Green.

Il est clair que le théorème subsiste si V désigne la somme d'un potentiel et d'une fonction harmonique.

La formule précédente se modifie si U et V désignent deux potentiels. Soit μ la densité de la distribution des masses m qui engendrent le potentiel U et soit μ' la densité de la distribution des masses m' qui engendrent V, on a :

$$\int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\int(U\mu' - V\mu)\,d\tau$$
$$= 4\pi\Sigma(m'U - mV).$$

Ces deux théorèmes s'étendent au potentiel logarithmique dans le plan.

69. Cela posé, considérons toujours le même volume T limité par S. Soient M (fig. 44) un point variable de S et M' un point fixe non situé sur S. Enfin, soit U une fonction harmonique dans T; posons

$$MM' = r$$

et considérons l'intégrale double étendue à la surface S :

$$\int\left(\frac{1}{r}\;\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\omega.$$

Fig. 44.

Si le point M' est extérieur à la surface S, on a :

$$\int\left(\frac{1}{r}\;\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\omega = 0.$$

Si au contraire M' est intérieur à S et si U' est la valeur de U en ce point, on a :

(6)..... $$\int\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dU}{dn} - U.\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\omega = 4\pi U'.$$

Les dérivées $\frac{dU}{dn}$ et $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ sont prises ici, en chaque point de S, suivant la normale extérieure.

Ces deux formules se déduisent de la formule (5) démontrée dans le paragraphe précédent. Il suffit de remplacer V par $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire de considérer V comme le potentiel newtonien d'une masse égale à l'unité située au point M'.

Cette intégrale (6) a une très grande importance; elle permet, on le voit, de calculer la valeur U', en un point M' d'un volume T, d'une fonction U harmonique dans ce volume, pourvu que l'on connaisse les valeurs de U et $\frac{dU}{dn}$ sur la surface S qui limite T.

Une formule analogue existe pour le cas du potentiel logarithmique dans le plan; on a :

$$(7) \ldots\ldots U' = \frac{1}{2\pi}\int\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dU}{dn} - U.\frac{d\log\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]ds;$$

le facteur $\frac{1}{4\pi}$ est remplacé par $\frac{1}{2\pi}$, le volume par une aire plane, la surface par le contour qui limite cette aire et le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$ par le potentiel logarithmique $\log\left(\frac{1}{r}\right)$.

70. Analogies avec la théorie des résidus de Cauchy. — On peut remarquer l'analogie de ce qui précède avec la théorie des résidus de Cauchy; la formule (7) dans le plan permet par exemple de retrouver le théorème des résidus.

Soit une aire plane S limitée par un contour C; plaçons-nous en coordonnées rectangulaires et soient x et y les coordonnées d'un point M. Considérons la variable complexe

$$z = x + iy$$

et soit f(z) une fonction de cette variable; si la fonction f est holomorphe dans l'aire S, on peut poser

$$f(z) = U + iT,$$

U et T étant des fonctions réelles des variables réelles x et y, et l'on a :

$$\Delta U = 0$$
$$\Delta T = 0$$

en tout point de S ; on a en outre :

$$(8)\ldots\ldots \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = - \dfrac{\partial T}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Soient maintenant M′ un autre point du plan, x′ et y′ ses coordonnées et z′ la valeur de z en ce point ; on a :

$$z' = x' + iy'.$$

Considérons la fonction $\log \dfrac{1}{z - z'}$; on peut poser :

$$\log \frac{1}{z - z'} = V + iW.$$

V n'est autre que $\log\left(\dfrac{1}{r}\right)$ et W est comme V une fonction réelle de x et y, si l'on suppose M′ fixe.

Appelons enfin U′ et T′ les valeurs en M′ des fonctions harmoniques U et T ; on a, en vertu de la formule (7) et en remplaçant $\log\left(\dfrac{1}{r}\right)$ par son égal V :

$$(9)\ldots\ldots \quad \left| \begin{array}{l} 2\pi U' = \displaystyle\int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds \\ 2\pi T' = \displaystyle\int \left(V \frac{dT}{dn} - T \frac{dV}{dn} \right) ds. \end{array} \right.$$

Cela posé, revenons aux formules (8) ; changeons d'axes de coordonnées en transportant les axes actuels parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque x_0, y_0 du plan, puis en les faisant tourner d'un angle α ; appelons ξ et η les nouvelles coordonnées, les formules de transformation sont :

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + x_0$$
$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + y_0$$

et l'on voit sans peine, en tenant compte des formules (8), que l'on a :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}.$$

Supposons par exemple que nous prenions comme origine un

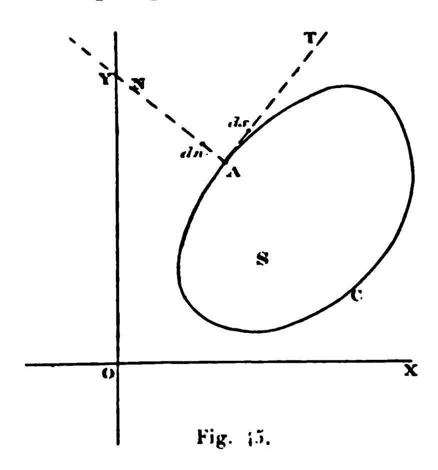


Fig. 45.

point A de la courbe C et comme axes la normale extérieure AN et la tangente AT en ce point (fig. 45). On a alors :

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dT}{dn}$$

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{dT}{ds},$$

le sens positif de la tangente étant le sens des rotations inverses ; prenons au contraire pour sens positif le sens des rotations directes, nous aurons :

$$-\frac{dU}{ds} = \frac{dT}{dn}$$

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dT}{ds}.$$

On démontrerait de même les formules :

$$-\frac{dV}{ds}=\frac{dW}{dn}$$
$$\frac{dV}{dn}=\frac{dW}{ds}.$$

Les intégrales (9) peuvent alors s'écrire :

$$2\pi U'=\int_{(c)}(VdT-UdW)$$
$$2\pi T'=\int_{(c)}(-VdU-TdW),$$

ces deux intégrales curvilignes étant prises dans le sens dire (sens inverse des aiguilles d'une montre). La fonction W n'e pas uniforme ; mais les autres, U, V, T, sont uniformes et l' peut écrire :

$$\int VdT=-\int TdV$$
$$\int VdU=-\int UdV$$

on a donc :

$$2\pi U'=-\int TdV+UdW$$
$$2\pi T'=\int UdV-TdW.$$

On a d'autre part :

$$\frac{-dz}{z-z'}=dV+idW$$

et par suite :

$$\int f(z)\frac{dz}{z-z'}=\int(U+iT)(-dV-idW)$$

ou :

$$\int f(z).\frac{dz}{z-z'}=\int -UdV+TdW-i\int TdV+UdW$$
$$=2\pi T'-i.2\pi U'$$
$$=2i\pi(U'+iT')=2i\pi f(z')$$

d'où enfin :

$$f(z') = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z - z'}dz.$$

C'est le théorème des résidus de Cauchy.

Ce théorème n'est vrai que si le point M′ est intérieur au contour C ; les formules (9), de même, ne peuvent s'appliquer que dans ce cas.

71. Définition de la fonction de Green. — Soient un volume T limité par une surface fermée S et M′ un point situé à l'intérieur de T.

Supposons que l'on puisse trouver une fonction H satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est harmonique dans T,

2° On a : $H = -\frac{1}{r}$ ..... sur S,

r désignant la distance du point fixe M′ (x', y', z') au point variable M (x, y, z).

La fonction H étant obtenue, posons :

$$G = H + \frac{1}{r}.$$

La fonction G ainsi définie est *la fonction de Green* relative au volume T et au point M′.

Cette fonction s'annule sur S et satisfait à l'équation de Laplace en tout point du volume T, sauf au point M′ où elle devient infinie.

La fonction de Green que nous venons de définir est relative à un volume limité et correspond au problème de Dirichlet intérieur. On peut de même définir la fonction de Green correspondant au problème de Dirichlet extérieur.

Soient toujours S une surface fermée et T l'espace situé à l'extérieur de cette surface. Soient, en outre, M′ un point fixe du domaine T et M un point variable; appelons r la distance MM′.

Supposons que l'on puisse trouver une fonction H satisfaisant aux conditions suivantes :

1° H est harmonique dans le domaine T.

2° On a : $H = -\frac{1}{r} \ldots\ldots$ sur S.

3° La fonction H s'annule à l'infini.

H étant obtenue, posons :

$$G = H + \frac{1}{r}.$$

La fonction G ainsi définie est la *fonction de Green* relative au point M′ et au domaine T. Elle s'annule sur S, devient infinie en M′ mais satisfait à l'équation de Laplace en tout autre point de T.

Quel que soit le domaine T, la fonction G est une fonction des coordonnées x, y, z du point variable M ; mais elle dépend aussi des coordonnées x', y', z' du point de discontinuité M′. On peut donc l'écrire $G(x, y, z, x', y', z')$, en la considérant comme une fonction de ces six variables, ou encore $G(M, M')$, en indiquant par cette notation la valeur, au point M, de la fonction de Green relative au domaine T et au point M′.

72. Propriétés de la fonction de Green. — Soient deux points M et M′ du domaine T; soient en outre $G(M, M')$ la valeur en M de la fonction de Green relative à T et au point M′ et $G(M', M)$ la valeur en M′ de la fonction de Green relative au point M. Je dis que l'on a :



Fig. 46.

$$G(M, M') = G(M', M).$$

Pour démontrer ce théorème, nous distinguerons deux cas.

Premier cas.— Le domaine T est situé à l'intérieur d'une surface S qui le limite (fig. 46). Soit alors M″ un troisième point du volume T. Posons :

$$G'(M) = G(M, M')$$
$$G''(M) = G(M, M'')$$

Montrons que l'on a :

$$G'(M'') = G''(M').$$

Pour cela, reportons-nous à une formule démontrée au paragraphe **68** : si U et V désignent deux potentiels newtoniens dus, le premier à une distribution m de masses, le deuxième à une distribution m′, on a :

$$\int_{(S)}\left(V\frac{dU}{dn}-U\frac{dV}{dn}\right)d\omega=4\pi\Sigma\,(mV-m'U).$$

Cette formule s'applique encore si U et V désignent l'un et l'autre la somme d'un potentiel et d'une fonction harmonique. Or, ce dernier cas est précisément le cas de G' et G''; G' est la somme d'une fonction harmonique H' et d'un potentiel dû à une masse $+1$ placée au point M'; G'' est la somme d'une fonction harmonique H'' et d'un potentiel dû à une masse $+1$ placée au point M''. On a donc :

$$\int\left(G'\frac{dG''}{dn}-G''\frac{dG'}{dn}\right)d\omega=4\pi\,[G''(M')-G'(M'')].$$

Mais la fonction G s'annule sur S ; G' et G'' sont donc nulles dans cette intégrale de surface et le premier membre est nul ; le second doit l'être aussi et l'on conclut :

$$G'(M'')=G''(M')$$

c'est-à-dire

$$G\,(M'',M')=G\,(M',M'')$$

et de même :

$$G\,(M,M')=G\,(M',M).$$

Le théorème annoncé est donc démontré. Cependant il faut remarquer que cette démonstration n'est pas sans défaut : elle suppose en effet qu'en chaque point de S, $\frac{dG}{dn}$ existe et est finie et bien déterminée. Or G est égal à $H+\frac{1}{r}$ et l'on sait, au sujet de H, seulement ceci, que l'on a :

$$\Delta H=0\ldots\ldots\text{ dans T}$$

$$H=-\frac{1}{r}\cdots\cdots\text{ sur S}$$

Mais on ne sait rien sur $\frac{dH}{dn}$. On ne sait donc rien non plus sur $\frac{dG}{dn}$.

On peut donner une démonstration plus rigoureuse, nous l'indiquerons plus loin, mais auparavant traitons le deuxième cas.

Deuxième cas.— Le domaine T est indéfini : c'est la portion de l'espace qui s'étend à l'extérieur d'une surface fermée S.

Traçons alors une sphère Σ de très grand rayon ayant pour centre M' et contenant à son intérieur la surface S et le point M

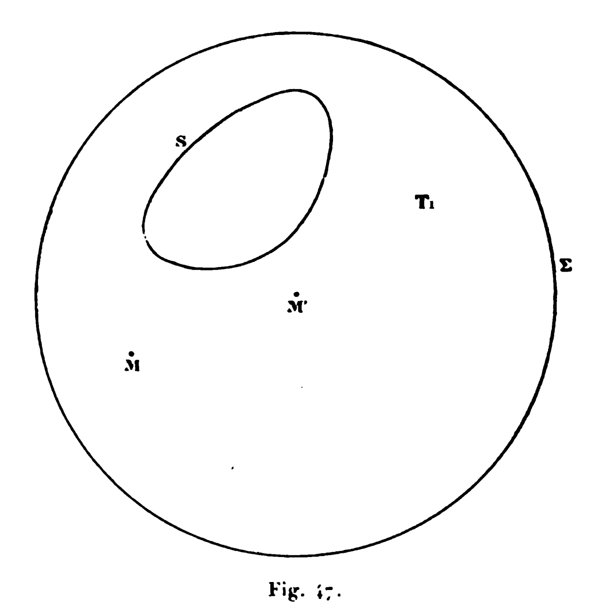


Fig. 47.

(fig. 47); appelons T_1 le domaine compris entre la sphère Σ et la surface S et désignons par G_1 la fonction de Green relative au volume T_1; enfin désignons par H_1 la fonction harmonique correspondant et par r et r' les rayons vecteurs issus de M et M'.

On peut écrire :

$$G_1(M, M') = H_1(M, M') + \frac{1}{r},$$

$$G_1(M', M) = H_1(M', M) + \frac{1}{r};$$

le volume T_1 étant limité, la démonstration du paragraphe précédent s'applique et l'on a :

$$G_1(M, M') = G_1(M', M).$$

Or, on a aussi :

$$G(M, M') = H(M, M') + \frac{1}{r},$$

$$G(M', M) = H(M', M) + \frac{1}{r},$$

et il faut démontrer que l'on a :

$$G(M, M') = G(M', M).$$

Comparons G et G_1 ; on a :

$$G - G_1 = H - H_1.$$

Considérons la différence $H - H_1$.

Cette fonction satisfait à l'équation de Laplace dans le volume T_1 ; elle s'annule sur S et prend des valeurs très petites en valeur absolue sur la sphère Σ, si celle-ci a un rayon très grand, parce que H et H_1 s'annulent à l'infini. Donc, dans le volume T_1, $H - H_1$ prend des valeurs très petites en valeur absolue, qui tendent vers zéro quand le rayon de Σ augmente indéfiniment.

Puisque $H - H_1$ tend vers zéro, $G - G_1$ tend aussi vers zéro.

Considérons alors les différences :

$$G(M, M') - G_1(M, M')$$
$$G(M', M) - G_1(M', M)$$

elles tendent vers zéro et comme on a constamment

$$G_1(M, M') = G_1(M', M)$$

on voit que la différence

$$G(M, M') - G(M', M)$$

tend aussi vers zéro quand le rayon de Σ croît indéfiniment ; mais, d'autre part, cette différence est indépendante de Σ, on a donc nécessairement :

$$G(M, M') = G(M', M).$$

et le théorème est démontré.

Cette démonstration repose, on le voit, sur celle du premier cas ; elle s'en déduit d'ailleurs rigoureusement ; mais elle n'est sans défaut que si la première est aussi sans défaut. J'ai indiqué plus haut, à propos de celle-ci, la critique qui peut être faite ; elle est relative à la dérivée $\frac{dG}{dn}$ dont il aurait fallu au préalable démontrer l'existence.

Il y a des cas cependant où l'on sait calculer la fonction de Green et vérifier ainsi directement l'existence de $\frac{dG}{dn}$.

Un de ces cas est celui de la sphère : nous allons le traiter rapidement à titre d'exemple. Occupons-nous d'abord du problème intérieur.

Soient Σ une sphère, O son centre (fig. 48) et a son rayon. Soit

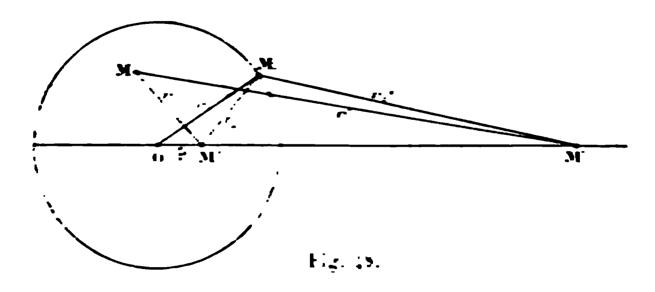


Fig. 48.

en outre M' un point intérieur : nous voulons calculer la fonction de Green relative à ce point.

A cet effet, menons le diamètre OM' et prenons sur ce diamètre le point M'' conjugué du point M' par rapport à la sphère ; enfin soit M un point intérieur quelconque et M_1 un point de la surface ; menons les droites OM_1, MM', MM'', M_1M', M_1M'' et posons :

$$MM' = r \quad M_1M' = r_1 \quad OM' = \rho.$$
$$MM'' = r' \quad M_1M'' = r'_1$$

On a :

$$OM' . OM'' = a^2$$

d'où

$$OM'' = \frac{a^2}{\rho}.$$

On a encore :

$$\frac{r_1}{r'_1} = \frac{a}{\rho},$$

d'où

(1)..... $$\frac{1}{r_1} = \frac{\rho}{ar'_1}.$$

Considérons alors la fonction

$$H = -\frac{\rho}{ar},$$

c'est un potentiel newtonien dû à la masse $-\frac{\rho}{a}$ située au point M'' ; cette fonction satisfait donc à l'équation de Laplace à l'intérieur de la sphère. Sur la surface, elle se réduit à $-\frac{1}{r}$ en vertu de la relation (1).

La fonction suivante :

(2)..... $$G = \frac{1}{r} - \frac{a}{\rho r},$$

est donc la fonction de Green cherchée.

La relation (2) montre qu'elle est égale à la différence de deux potentiels newtoniens, l'un dû à une masse $+1$ située en M', l'autre à une masse $-\frac{a}{\rho}$ située en M''. Toutes les dérivées existent donc sur la surface Σ, en particulier $\frac{dG}{dn}$ existe et est continue.

Le problème extérieur de Green pour une sphère se traite d'une manière tout à fait analogue. Le résultat qu'on obtient est le même :

$$G = \frac{1}{r} - \frac{a}{\rho r'}$$

où ρ désigne toujours la distance OM', le point M' étant ici en dehors de la sphère.

73. Revenons au cas général.

Établissons quelques autres propriétés de la fonction de Green qui nous seront nécessaires dans la suite.

1° *La fonction de Green est constamment positive dans le domaine* T.

Faisons cette démonstration dans le cas d'un volume T limité. On a :

$$G - \frac{1}{r} = H.$$

Lorsque r tend vers zéro, H reste fini, donc $G - \frac{1}{r}$ reste également fini, (rG—1) tend alors vers zéro et rG tend vers 1. Ainsi, quand r est très petit, le produit rG est très voisin de 1; on peut donc affirmer qu'au voisinage du point de discontinuité la fonction G est positive. Entourons alors ce point d'une sphère très petite Σ. Entre Σ et S, on a $\Delta G = 0$; sur S, G est nulle et sur S′ elle est >0; donc entre Σ et S, G est partout >0. Ainsi en tout point de T, G est positive.

2° *On a constamment dans le volume* T.

$$G < \frac{1}{r}.$$

On a effet $G = H + \frac{1}{r}$; or, dans T, H satisfait à l'équation de Laplace; de plus on a $H = -\frac{1}{r}$ et par suite $H < 0$ sur toute la surface S; si donc T est le volume contenu à l'intérieur de S et limité par cette surface, on a en tout point de T

$$G < \frac{1}{r}.$$

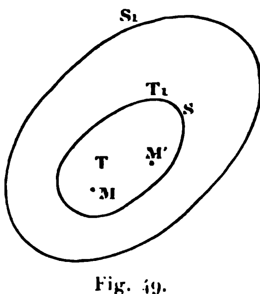


Fig. 49.

Cette propriété ainsi que la précédente s'étendent sans peine au cas où le domaine T est constitué par l'espace extérieur à une surface fermée S.

3° Soient encore (fig. 49) un domaine T limité par une surface S, et un autre plus grand T_1 limité par une surface S_1 et contenant le premier. Soit M′ un point intérieur à T; appelons G la fonction de Green relative à T et au point M′. On a :

$$G = H + \frac{1}{r}.$$

Appelons G_1 la fonction de Green relative à T_1 et au même point M' ; on a :

$$G_1 = H_1 + \frac{1}{r}.$$

Je dis qu'en tout point M intérieur à T on a :

$$G_1 > G.$$

En effet, en tout point intérieur à T, on a :

$$G - G_1 = H - H_1.$$

Or nous savons que G_1 est >0 dans T_1 ; on a donc :

$$H_1 + \frac{1}{r} > 0.$$

et par suite

$$-H_1 < \frac{1}{r},$$

en tout point de T_1 et en particulier en tout point de S.

Considérons alors la fonction $H - H_1$; elle satisfait dans T à l'équation de Laplace et reste négative sur S ; elle est donc négative en tout point de T.

Bref, à l'intérieur de T, on a $H - H_1 < 0$ et par conséquent $G_1 - G > 0$, d'où :

$$G_1 > G.$$

4° Soit maintenant (fig. 50) une surface fermée S. Considérons le domaine T extérieur à cette surface ; dans ce domaine, considérons un volume T_1 limité par une surface S_1.

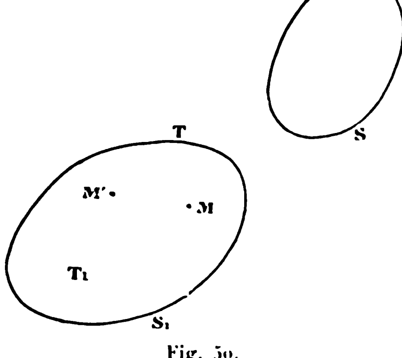


Fig. 50.

Soit maintenant M' un point du domaine T_1 ; appelons G la fonction de Green relative à T et au point M' et G_1 la fonction de Green relative à T_1 et au même point M'.

On démontre sans difficulté, en suivant le mode de raisonnement qui a servi dans le cas précédent, que l'on a :

$$G_1 < G$$

en tout point M de T_1.

5° Considérons un domaine T limité par une surface fermée S. Soit M′ un point de ce domaine et G la fonction de Green relative à ce point et à ce domaine.

Envisageons les surfaces :

$$G = \text{const.}$$

A chaque valeur de la constante correspond une surface particulière.

Pour des valeurs très grandes de la constante, on a évidemment des surfaces très petites entourant le pôle M′ puisque la fonction G devient infinie en ce point.

Pour des valeurs très petites de la constante, on a au contraire des surfaces très voisines de S.

Enfin on passe d'une surface à une autre par déformation continue en faisant varier la constante d'une manière continue.

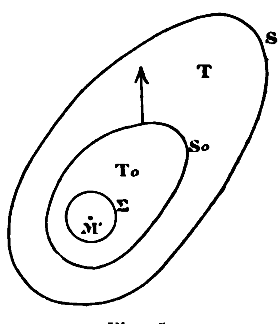


Fig. 51.

D'ailleurs la fonction G étant uniforme dans le volume T, deux surfaces correspondant à deux valeurs différentes de la constante ne peuvent pas se couper.

Les surfaces

$$G = C.$$

entourent donc le pôle et s'enveloppent mutuellement.

Cela posé, soit une valeur particulière G_0 de la constante ; considérons (fig. 51) la surface

$$G = G_0.$$

Appelons-la S_0; elle délimite, à l'intérieur de T, un domaine T_0.

Traçons autour du point M′ une sphère Σ; nous pouvons la choisir assez petite pour que le minimun de G sur cette sphère

dépasse toute quantité donnée puisque G devient infinie en M'; choisissons Σ de telle sorte qu'en tous ses points on ait

$$G > G_0.$$

Entre S_0 et Σ, la fonction G est harmonique, elle atteint donc son minimum sur l'une des deux surfaces S_0 ou Σ; ici ce ne peut être que sur Σ et ce minimum est G_0. Ainsi en tout point de T_0, on a :

$$G > G_0.$$

Au contraire, entre S et S_0 la fonction G est harmonique et son maximum est sur S_0 puisqu'en tout point de S, G est nulle. Ce maximum est donc G_0 et l'on a en tout point extérieur à S_0 et intérieur à S :

$$G < G_0.$$

Considérons alors la dérivée $\dfrac{dG}{dn}$ prise suivant la normale extérieure à S_0.

Cette dérivée existe puisque S_0 est à l'intérieur de S et qu'en tout point de T la fonction G a des dérivées des deux premiers ordres. D'ailleurs on a en tout point de S_0 :

$$\frac{dG}{dn} < 0$$

puisque l'on a :

$$G < G_0$$

en tout point compris entre S et S_0.

Reprenons maintenant la formule démontrée au N° 68 :

$$(1)\ldots\ldots \quad \int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\omega = 4\pi\Sigma(mV - m'U).$$

Remplaçons dans cette formule la fonction V par la fonction de Green G, laquelle est la somme d'une fonction harmonique H et du potentiel $\dfrac{1}{r}$ dû à la masse $m' = 1$ située au pôle M'. Remplaçons en outre U par 1 ; nous devrons faire $m = 0$ et la formule considérée deviendra

$$(2)\ldots\ldots \quad \int\frac{dG}{dn}d\omega = -4\pi.$$

Cette intégrale a un sens si on l'étend à la surface S_0 puisque $\frac{dG}{dn}$ est bien défini sur cette surface.

74. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer rigoureusement le théorème du N° **72** dont nous n'avions donné qu'une démonstration imparfaite.

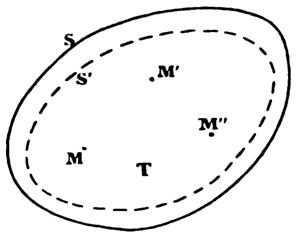


Fig. 52.

Considérons toujours un domaine T limité par une surface S et prenons dans T deux points M' et M'' (fig. 52).

Appelons G' la fonction de Green relative au domaine T quand on prend M' pour pôle et G'' la fonction de Green relative au même domaine quand le pôle est le point M''. Désignons en général par les notations :

$$G'(M) \quad \text{et} \quad G''(M)$$

les valeurs de ces fonctions en un point quelconque M de T.

Nous voulons démontrer l'égalité :

$$G'(M'') = G''(M').$$

Pour y parvenir, donnons-nous un nombre ε' très petit et considérons la surface :

$$G' = \varepsilon'.$$

Appelons-la S' ; elle est très voisine de S et, si ε' est assez petit, elle contient à son intérieur les points M' et M''.

Considérons alors l'intégrale :

$$J = \int_{S'} \left(G' \frac{dG''}{dn} - G'' \frac{dG'}{dn} \right) d\omega$$

étendue à la surface S' ; elle est bien déterminée en vertu des remarques faites dans le paragraphe précédent ; de plus la formule (1) dans laquelle on fait :

$$U = G'$$
$$V = G''$$

et par conséquent :

$$m = 1$$
$$m' = 1,$$

nous permet d'écrire :

(3)..... $$J = 4\pi[G''(M') - G'(M'')].$$

Montrons que J est nul.

Cette intégrale est la différence de deux autres :

$$\int G' \frac{dG''}{dn} d\omega$$

et

$$\int G'' \frac{dG'}{dn} d\omega.$$

La première peut s'écrire

$$\varepsilon' \int \frac{dG''}{dn} d\omega$$

puisque la fonction G′ est constante sur S′ et égale à ε'. Si l'on tient compte en outre de la relation (2), cette expression devient :

$$- 4\pi\varepsilon'.$$

La première intégrale tend donc vers zéro avec ε'.

Voyons maintenant la seconde.

Dans cette intégrale, $\frac{dG'}{dn}$ est constamment négatif comme nous l'avons montré ; appelons alors ε'' la limite supérieure de G″ sur S′, on a :

$$\left| \int G'' \frac{dG'}{dn} d\omega \right| < 4\pi\varepsilon''.$$

Or ε'' tend vers zéro en même temps que ε', car la surface S′ tend alors vers la surface S. Donc l'intégrale considérée tend vers zéro.

Ainsi J tend vers zéro en même temps que ε' et par suite l'expression

$$4\pi[G'(M'') - G''(M')]$$

qui lui est égale y tend aussi.

Mais cette expression a une valeur fixe, elle est donc nécessairement nulle et l'on a bien

$$G'(M'') = G''(M').$$

Le théorème annoncé est démontré.

75. Problème de Green. — Problème de Dirichlet transformé. — Comparaison avec le problème de Dirichlet ordinaire. — Équivalence de ces trois problèmes. — L'énoncé du problème de Dirichlet ordinaire a été donné plus haut (64). Voici l'énoncé du problème de Green.

Plaçons-nous dans l'espace à trois dimensions.

Soit un volume T limité par une surface fermée S : calculer la fonction de Green relative à ce volume et à un quelconque de ses points.

Ainsi énoncé, le problème de Green peut être appelé problème intérieur de Green ; mais, comme pour le problème de Dirichlet, on peut énoncer un problème extérieur de Green.

Dans tout ce qui va suivre, nous ne nous occuperons que des problèmes intérieurs ; les mêmes considérations s'appliqueront aux problèmes extérieurs.

On peut montrer facilement l'équivalence du problème de Green et du problème de Dirichlet.

Soit U la fonction qui doit satisfaire à l'équation de Laplace dans T et dont il s'agit de déterminer les valeurs dans T par ses valeurs sur S. Sa valeur U' en un point M' de T est donnée par la formule suivante

$$4\pi U' = \int\int \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) d\omega.$$

L'intégrale double du second membre est étendue à la surface S : G est la fonction de Green relative au point M' et à T. Cette formule se déduit de l'intégrale (6) du paragraphe 69 en remplaçant le potentiel $\frac{1}{r}$ par la somme G du potentiel $\frac{1}{r}$ et de la fonction harmonique H.

Si nous remarquons que G s'annule sur S, la formule ci-dessus se réduit à

$$4\pi U' = -\int\int U \frac{dG}{dn} d\omega.$$

ou bien

$$U' = -\frac{1}{4\pi}\int U \frac{dG}{dn} d\omega.$$

Si donc on sait résoudre le problème de Green, on saura calculer la valeur U' de U en chaque point M' de T, c'est-à-dire résoudre le problème de Dirichlet.

Inversement, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet, on sait calculer la fonction H et par suite la fonction de Green G pour chaque point M' de T.

Les deux problèmes de Green et de Dirichlet ordinaire sont donc équivalents.

76. Voici maintenant en quoi consiste le *problème de Dirichlet transformé :*

Trouver une fonction V satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Que V soit continue ainsi que ses dérivées premières dans T ;

2° Que ses dérivées secondes soient finies ;

3° Qu'à l'intérieur de T on ait, en chaque point :

$$\Delta V = -4\pi\mu,$$

μ étant une fonction finie et intégrable donnée ;

4° Que sur la surface S on ait

$$V = 0.$$

Posons

$$U = \int \mu' \frac{d\tau'}{r}$$

U satisfait aux conditions (1), (2), (3), mais non à la quatrième. Appelons U_s les valeurs de U sur S ; si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet ordinaire, on sait calculer une fonction W satisfaisant aux conditions (1), (2) et aux deux suivantes

$$\Delta W = 0\ldots\ldots \text{ dans T}$$
$$W = -U_S\ldots\ldots \text{ sur S.}$$

La fonction

$$V = U + W$$

satisfait aux 4 conditions proposées. Ainsi donc, si l'on sait résoudre

le problème de Dirichlet ordinaire, on sait aussi résoudre le problème de Dirichlet transformé.

Inversement, supposons que nous sachions résoudre ce dernier problème, proposons-nous de résoudre le problème de Dirichlet ordinaire, c'est-à-dire déterminons une fonction U telle que l'on ait :

$$\Delta U = 0 \ldots\ldots \text{ dans T}$$
$$U = \varphi \ldots\ldots \text{ sur S,}$$

φ étant une fonction donnée.

Pour y parvenir, formons une fonction W continue dans T ainsi que ses dérivées premières et secondes et se réduisant à φ sur la surface : cela est possible d'une infinité de manières. L'une de ces fonctions W étant choisie, la fonction ΔW est connue dans T. Pour achever le problème, il suffit de résoudre le problème de Dirichlet transformé en prenant pour μ la fonction ΔW. On obtient ainsi une deuxième fonction V.

Considérons alors la fonction

$$U = V + W.$$

Elle satisfait aux conditions proposées et résout le problème de Dirichlet ordinaire.

77. Montrons enfin l'équivalence du problème de Green et du problème de Dirichlet transformé.

Supposons que nous sachions résoudre le problème de Green. Considérons alors l'intégrale :

$$V = \int G(x, y, z, x', y', z')\, \mu' d\tau'$$

G étant la fonction de Green et l'intégrale étant étendue au volume T.

La fonction V ainsi obtenue est la solution du problème de Dirichlet transformé.

En effet, écrivons :

$$G = H - \frac{1}{r};$$

la fonction V prendra la forme :

$$V = \int \frac{\mu' d\tau'}{r} - \int H \mu' d\tau'.$$

Appelons V_1 la première intégrale et V_2 la seconde ; faisons voir maintenant que la somme $V_1 + V_2$ satisfait aux quatre conditions du problème de Dirichlet transformé.

1° V_1 est un potentiel de volume ; V_1 satisfait donc aux conditions de continuité. H est une fonction harmonique ; on peut, dans V_2, différentier sous le signe $\int$ et l'on voit ainsi que V_2 satisfait comme V_1 aux conditions de continuité. Donc V, qui est la somme de ces deux fonctions, y satisfait aussi.

2° On a :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2,$$

de plus :

$$\Delta V_1 = -4\pi\mu$$

et

$$\Delta V_2 = 0 \text{ car } \Delta V_2 = \int \Delta H \mu' d\tau' ;$$

donc, en somme :

$$\Delta V = -4\pi\mu.$$

3° Soient M un point intérieur à T, M_0 (fig. 53), un point de S, V la valeur de la fonction étudiée en M ; je dis que, si M

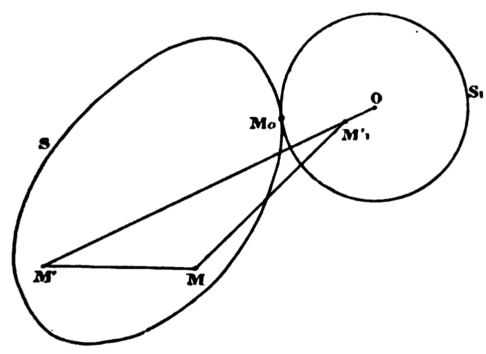


Fig. 53.

tend vers M_0, V tend vers zéro. Pour le démontrer, décrivons une sphère S_1 tangente extérieurement à S en M_0 ; cela est généralement possible. Distinguons alors plusieurs cas :

Premier cas : $\mu > 0$.

Dans ce cas, V qui est égal à $\int G\mu' d\tau'$ est positif puisque G et μ' le sont.

Appelons G la fonction de Green relative à l'extérieur de la sphère et au point M'; on sait que :

$$G_1 \geq G.$$

Désignons par a le rayon de la sphère, par O son centre et par ρ la distance OM'; appelons M'_1 le conjugué harmonique de M' par rapport à la sphère ; on a :

$$\overline{OM'}\,\overline{OM'_1} = a^2.$$

Enfin posons :

$$r = MM'$$

$$r_1 = MM'_1.$$

On a :

$$V < \int G_1 \mu' d\tau'.$$

Mais nous connaissons l'expression de la fonction de Green relative à l'extérieur d'une sphère; c'est

$$G_1 = \frac{1}{r} - \frac{a}{\rho r_1}.$$

On a donc :

$$V < \int \frac{\mu'}{r} d\tau' - \int \frac{a\mu' d\tau'}{\rho r_1}.$$

Quand le point M' décrit l'élément $d\tau'$ dans T, M'_1 décrit un élément $d\tau'_1$ dans S, et au volume T correspond un volume transformé T'_1 situé à l'intérieur de S_1. Les deux éléments $d\tau'$ et $d\tau'_1$ sont reliés par la formule connue de la théorie de l'inversion :

$$\frac{d\tau'}{d\tau'_1} = \frac{\overline{OM'}^3}{\overline{OM'_1}^3} = \frac{\rho^3}{\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^3} = \frac{\rho^6}{a^6}.$$

L'inégalité ci-dessus devient alors :

$$V < \int \frac{\mu'}{r} d\tau' - \int \frac{\frac{\rho^5 \mu'}{a^5}}{r_1} d\tau'_1$$

la première intégrale est étendue au volume T, c'est un potentiel

newtonien dû à des masses dont la densité variable est μ'; la deuxième intégrale est étendue au volume T'_1 et représente un potentiel newtonien dû à des masses dont la densité est $\frac{\rho^5\mu'}{a^5}$. Ce sont donc deux fonctions continues ainsi que leur différence. Or cette différence est nulle sur S_1 et en particulier au point M_0, donc cette différence tend vers zéro quand M tend vers M_0. La fonction V, qui est comprise entre zéro et une quantité qui tend vers zéro, tend donc vers zéro.

Deuxième cas : $\mu < 0$.

Alors V est négatif et l'on démontre de la même manière que :

$$0 > V > \int \frac{\mu'}{r}\, d\tau' - \int \frac{\frac{\rho^5\mu'}{a^5}}{r_1}\, d\tau'_1$$

V, compris entre O et une quantité qui tend vers zéro, tend vers zéro quand M tend vers M_0.

Troisième cas : μ quelconque.

On peut poser :

$$\mu = \mu'_1 + \mu'_2,$$

μ'_1 étant égal à μ quand μ est >0 et nul partout ailleurs, μ'_2 au contraire étant égal à μ quand μ est <0 et nul partout ailleurs; μ'_1 et μ'_2 sont continues comme μ. On donne ainsi naissance à deux fonctions V'_1 et V'_2 correspondant à μ'_1 et μ'_2; elles rentrent dans les deux cas précédents et tendent vers zéro quand M tend vers M_0. Il en est donc de même de $V = V'_1 + V'_2$ qui correspond à μ.

Ainsi, en général, quel que soit le signe de μ, V tend vers zéro quand M tend M_0.

La fonction V satisfait aux quatre conditions du problème de Dirichlet transformé : c'est la solution cherchée.

En résumé les trois problèmes : de Dirichlet ordinaire, de Dirichlet transformé, de Green sont équivalents.

78. Cas du potentiel logarithmique. — Ces résultats s'étendent

au cas de deux variables et au potentiel logarithmique dans le plan.

Il y a cependant une différence : dans le cas du potentiel newtonien on ne sait résoudre le problème de Dirichlet que quand on sait former toutes les fonctions de Green relatives à tous les points du domaine. Dans le cas du potentiel logarithmique, le calcul de la fonction de Green pour un point du domaine suffit : le calcul pour les autres points s'en déduit.

CHAPITRE V

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LES CAS DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE. THÉORÈME DE HARNACK

79. Fonction de Green pour le cas du cercle. — Il est facile de former la fonction de Green relative à un cercle C de centre O et de rayon a (fig. 54) et à un point M′ intérieur à ce cercle.

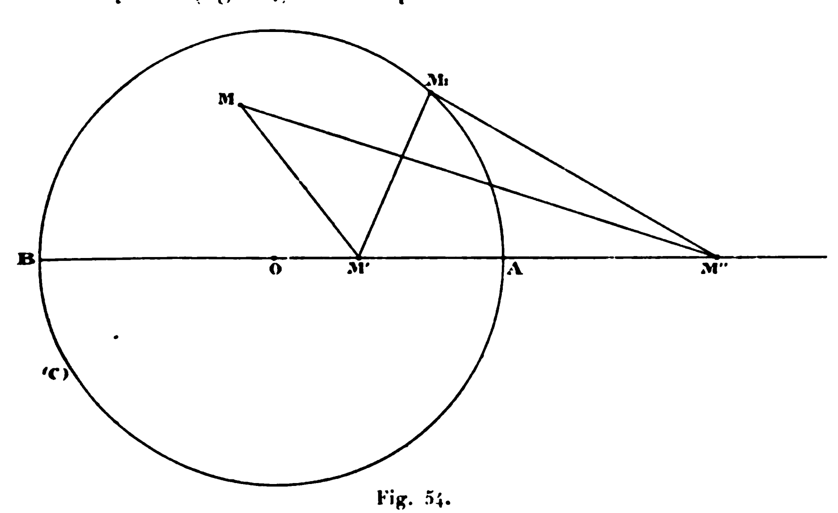


Fig. 54.

Traçons OM′ qui rencontre le cercle en A et B et prenons sur cette droite le point M″ conjugué harmonique de M′ par rapport à A et B. Soient d'autre part M un point quelconque situé à l'intérieur de C et M_1 un point quelconque situé sur le contour de C. Posons :

$$OM' = \rho, \quad OM'' = \frac{a^2}{\rho}$$

$$MM' = r, \quad MM'' = r'$$

$$M_1M' = r_1, \quad M_1M'' = r'_1$$

On a la relation :

$$\frac{r'_1}{r_1} = \frac{a}{\rho}$$

quel que soit le point M_1.

On a d'autre part :

$$\log \frac{r_0}{r} - \log \frac{r_0}{r'} = \log \frac{r'}{r}$$

et :

$$\log \frac{r'_1}{r_1} = \log \frac{a}{\rho}.$$

Posons alors :

$$G = \log \frac{r_0}{r} + H$$

$$H = -\log \frac{r_0}{r'} - \log \frac{a}{\rho}$$

On a bien :

$$\Delta H = 0$$

et de plus H prend bien sur C les mêmes valeurs que $\log \frac{r_0}{r}$. D'où :

$$G = \log \frac{r'}{r} - \log \frac{a}{\rho}$$

et G est la fonction de Green cherchée.

On peut suivre une marche analogue pour former la fonction de Green relative à un domaine constitué par la partie du plan qui est extérieure au cercle C.

Sachant trouver la fonction de Green pour le cas d'un cercle, on sait par là même, comme nous l'avons vu, résoudre le problème de Dirichlet pour le cas du cercle. Il y a bien encore, il est vrai, quelques difficultés. Mais elles seront levées plus loin à propos de la sphère. Il est inutile d'insister sur le cas du cercle, la méthode à suivre étant la même que pour la sphère.

80. On peut suivre une méthode plus directe pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas du cercle.

Plaçons l'origine des coordonnées au centre du cercle donné C. Soit M′ un point intérieur à C. Appelons x, y les coordonnées

rectilignes rectangulaires de ce point et ρ, ω ses coordonnées polaires. On a :

$$x = \rho \cos \omega$$
$$y = \rho \sin \omega.$$

Cela posé, on veut trouver une fonction continue V possédant des dérivées partielles des deux premiers ordres elles-mêmes continues et vérifiant les conditions suivantes :

$$\Delta V = 0 \ldots\ldots \text{ à l'intérieur de C,}$$
$$V = \varphi(\omega) \ldots\ldots \text{ sur le contour de C,}$$

$\varphi(\omega)$ étant une fonction donnée. Si cette fonction satisfait à la *condition de Dirichlet*, on peut la développer en série de Fourier :

$$\varphi(\omega) = A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos n\omega + \sum_1^\infty B_n \sin n\omega.$$

Posons alors :

$$V = A_0 + \sum_1^\infty A_n \rho^n \cos n\omega + \sum_1^\infty B_n \rho^n \sin n\omega.$$

Je dis que V est la solution cherchée.

Remarquons que nous avons supposé implicitement le rayon du cercle C égal à l'unité. S'il était égal à R, il faudrait écrire :

$$V = A_0 + \sum_1^\infty A_n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n\omega + \sum_1^\infty B_n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sin n\omega$$

Mais rien ne serait changé pour cela aux raisonnements qui vont suivre.

Étudions la fonction V. Plaçons-nous d'abord en un point situé à l'intérieur du cercle C. En un tel point, on a :

$$\rho < 1.$$

Prenons ρ_0 tel que :

$$\rho < \rho_0 < 1.$$

Cela est possible. D'autre part il est facile d'assigner une limite

supérieure N aux modules des coefficients de la série $\varphi(\omega)$. Dans ces conditions, on a évidemment :

$$|A_n\rho^n \cos n\omega| < N\rho_0^n$$
$$|B_n\rho^n \sin n\omega| < N\rho_0^n$$
$$|A_0| < N.$$

Les termes de la série V sont donc inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants de la série :

$$N + 2\sum_1^\infty N\rho_0^n$$

qui est convergente et à termes tous positifs. Donc, dans tout domaine intérieur au cercle C, la série V est absolument et uniformément convergente et sa somme V est une fonction continue. On démontre de la même façon que V possède des dérivées partielles de tous les ordres elles-mêmes continues.

Il résulte des remarques précédentes que, pour montrer que l'on a :

$$\Delta V = 0$$

en tout point intérieur à C, il suffit de montrer que chaque terme de la série V satisfait à cette relation. Or on a :

$$(x + iy)^n = \rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

Mais $(x + iy)^n$ est une fonction analytique holomorphe de $x + iy$. D'où :

$$\Delta(\rho^n \cos n\omega) = 0$$
$$\Delta(\rho^n \sin n\omega) = 0.$$

On peut d'ailleurs le vérifier directement. En effet, changeons de variables et écrivons l'identité :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}.$$

Tout revient à voir que l'on a :

$$\frac{\partial^2 \rho^n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho^n}{\partial \rho} - \frac{n^2\rho^n}{\rho^2} = 0$$

c'est-à-dire :

$$n(n-1)+n-n^2=0$$

ce qui est évident.

Enfin, en vertu d'un théorème d'Abel relatif aux séries entières, il est clair que V tend vers $\varphi(\omega)$ lorsque ρ tend vers 1. Donc V est bien la fonction cherchée.

Remarquons que l'on vérifie aisément les relations :

$$\Delta\left(\frac{\cos n\omega}{\rho^n}\right)=0$$

$$\Delta\left(\frac{\sin n\omega}{\rho^n}\right)=0.$$

Si donc on pose :

$$V=A_0+\sum_1^\infty \frac{A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega}{\rho^n},$$

on obtient la solution du problème de Dirichlet pour le cas où le domaine envisagé est constitué par la partie du plan extérieure au cercle C.

81. Représentation conforme. — Soit une variable complexe :

$$z=x+iy.$$

Considérons une fonction analytique holomorphe de la variable z :

$$f(z)=X+iY.$$

On a :

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

D'où :

$$\Delta X=0, \quad \Delta Y=0.$$

De plus, X et Y sont continues et possèdent des dérivées partielles de tous les ordres elles-mêmes continues. Ce sont donc certainement des fonctions harmoniques.

Réciproquement, soit X une fonction uniforme de x et y, har-

monique dans un certain domaine D. Je dis que c'est la partie réelle d'une fonction de variable complexe régulière dans le domaine envisagé. Posons en effet :

$$Y = \int_L \frac{\partial X}{\partial x} dy - \frac{\partial X}{\partial y} dx,$$

L étant un chemin d'intégration qui ne sort pas du domaine D. L'expression :

$$\frac{\partial X}{\partial x} dy - \frac{\partial X}{\partial y} dx$$

est une différentielle exacte puisque l'on a par hypothèse :

$$\Delta X = 0.$$

Donc l'intégrale curviligne considérée est indépendante du choix que l'on fait pour L. De plus, on a bien :

$$\frac{dY}{\partial x} = - \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Donc X + i Y est une fonction analytique de x + i y. D'ailleurs il est évident que cette fonction n'a aucun point singulier dans le domaine D. Je dis qu'elle est uniforme. En effet on a :

$$df = dX + idY.$$

Mais :

$$\int_C dX = 0, \quad \int_C dY = 0,$$

si C est un contour fermé situé tout entier dans D. D'où :

$$\int_C df = 0$$

dans les mêmes conditions.

82. — Soient deux aires a et A limitées respectivement par les contours c et C. Supposons qu'il existe une correspondance univoque et réciproque entre les points de a et ceux de A, de telle sorte qu'à tout point m de a corresponde un point M de A et un seul, et réciproquement. On dit alors que l'on a effectué

la *représentation uniforme* des deux aires a et A l'une par l'autre. Appelons x, y les coordonnées de m et X, Y celles de M; X, Y sont des fonctions uniformes de x, y et réciproquement.

Envisageons deux courbes tracées dans a et se coupant en m : il leur correspond deux courbes tracées dans A et se coupant en M, si, comme nous le supposons, la correspondance établie entre a et A est telle qu'à deux points infiniment voisins pris dans a correspondent deux points infiniment voisins dans A et réciproquement.

Si l'angle des deux courbes de A en M est égal à l'angle des deux courbes de a en m, c'est-à-dire si les angles sont conservés par la transformation, on dit que la représentation est *conforme*. Il y a d'ailleurs deux sortes de représentations conformes : les *directes* et les *inverses*, suivant que les angles correspondants sont ou non de même sens. Je ne m'occuperai que des représentations conformes directes. Dans ce cas, X + iY doit être une fonction analytique de x + iy. D'où :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Il est clair que, si l'on sait faire la représentation conforme d'une aire α sur une aire β et celle de β sur une troisième aire γ, on saura aussi faire la représentation conforme de α sur γ.

83. — Supposons maintenant que l'on sache faire la représentation conforme de a sur A. Admettons en outre que le problème de Dirichlet ait été résolu pour le domaine a limité par c. *Alors on pourra le résoudre pour le domaine A limité par C.*

En effet notre hypothèse est que l'on sait construire une fonction v régulière dans a vérifiant les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots \text{ dans a}$$

$$V = \varphi(S) \ldots\ldots \text{ sur c}$$

$\varphi(s)$ étant une fonction donnée de l'arc s de c.

Cela posé, nous voulons trouver une fonction V régulière dans A et vérifiant les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0 \ldots \text{ dans A}$$

$$V = \Phi(S) \ldots\ldots \text{ sur C}$$

$\Phi(S)$ étant une fonction donnée de l'arc S de C.

En vertu d'une remarque faite au paragraphe **81**, v est la partie réelle d'une fonction analytique holomorphe de $x+iy$:

$$v + iw = f(x + iy)$$

mais on a :

$$X + iY = F(x + iy)$$

D'où :

$$v + iw = f_1(X + iY)$$

On peut alors poser :

$$V = v(X, Y).$$

La fonction V est harmonique dans A et prend sur C la même succession de valeurs que v sur c.

On sait résoudre le problème de Dirichlet pour un cercle. Donc on peut le résoudre pour toutes les aires qui sont conformément représentables sur un cercle.

84. Considérons encore une aire T. Si l'on connaît la fonction de Green relative au domaine T et à un point particulier M' de ce domaine, je dis que l'on pourra trouver toutes les fonctions de Green relatives au même domaine. En effet on a :

$$G = \log \frac{r_0}{r} + H,$$

la fonction H étant définie par les égalités suivantes :

$$\Delta H = 0 \ldots\ldots \text{ dans T}$$

$$H = -\log \frac{r_0}{r} \ldots\ldots \text{ sur le contour de T.}$$

La fonction G est uniforme. De plus c'est la partie réelle d'une

fonction analytique de $x + iy$. Appelons G' la fonction qui lui est associée et posons :

$$G + iG' = f(x + iy).$$

La fonction G' est-elle uniforme ? Nous ne pouvons pas l'affirmer, à cause de l'existence du point singulier situé en M'. Mais, pour voir ce qu'il en est, il nous suffit de tracer les courbes :

$$G = C^{te}.$$

Nous savons qu'elles s'enveloppent mutuellement (§ 73) et qu'elles contiennent toutes le point M' à leur intérieur. Cela posé, désignons par $\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ les dérivées prises respectivement suivant la tangente et la normale à l'une de ces courbes. On a :

$$\frac{dG'}{ds} = \frac{dG}{dn}$$

$$\frac{dG'}{dn} = -\frac{dG}{ds}.$$

D'où :

$$\int dG' = \int \frac{dG'}{ds} ds = \int \frac{dG}{dn} ds,$$

le contour d'intégration étant l'une des courbes :

$$G = G^{te}.$$

Or, nous avons vu que :

$$\int \frac{dG}{dn} ds = -2\pi.$$

Donc :

$$\int dG' = -2\pi$$

et la fonction G' n'est pas uniforme, puisqu'elle augmente de -2π quand on fait décrire au point x, y un contour fermé entourant le point M'. Toutefois, si la fonction G' n'est pas uniforme, il n'en est pas de même de la fonction :

$$e^{iG'}.$$

Donc on peut poser :

$$e^{G+iG'} = f_1(x+iy) = X+iY,$$

f_1 étant une fonction analytique uniforme de $x+iy$.

Maintenant, considérons le cercle :

$$X^2+Y^2=1.$$

Je dis que nous pouvons faire la représentation conforme de l'aire T sur ce cercle. On a :

$$\sqrt{X^2+Y^2}=e^G.$$

Donc les courbes :

$$G = C^{te}$$

se transforment en les cercles concentriques :

$$X^2+Y^2=C^{te}.$$

D'ailleurs la courbe :

$$G=0$$

qui n'est autre que le contour de l'aire T devient le cercle :

$$X^2+Y^2=1.$$

La représentation est ainsi réalisée. En conséquence, on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire T et par suite trouver toutes les fonctions de Green relatives à ce domaine. La proposition annoncée est donc établie.

Ce théorème n'est plus vrai dans le cas de l'espace.

85. Résolution du problème de Dirichlet pour le cas de la sphère. — Nous avons déjà formé (§ 72) la fonction de Green relative à une sphère et à un point M′ situé à l'intérieur de celle-ci. Si l'on appelle (fig. 55) :

a..... le rayon de la sphère,
ρ..... la distance OM′,
r..... la distance MM′
r'.... la distance MM″,

on a :

$$G=\frac{1}{r}-\frac{a}{\rho r'}.$$

En tout point de la surface de la sphère, la relation :

$$\frac{r'}{r} = \frac{a}{\rho}$$

est vérifiée, puisque les points M' et M'' sont conjugués harmoniques par rapport à la sphère.

Posons :

$$\theta = \widehat{M_1OM'}$$

$$\varphi = \widehat{OM_1M'}$$

$$\psi = \widehat{NM_1M''}.$$

Alors :

$$-\frac{dG}{dn} = \frac{\cos\varphi}{r^2} + \frac{a\cos\psi}{\rho r'^2}.$$

En effet $-\frac{dG}{dn}$ est la projection sur le rayon O M_1 des attrac-

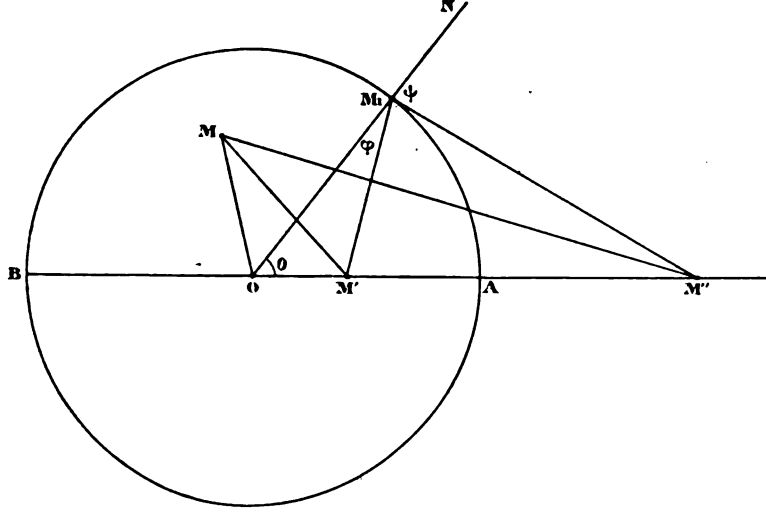


Fig. 55.

tions dues à deux masses, l'une + 1 située en M', l'autre $-\frac{a}{\rho}$ située en M''. On peut d'ailleurs facilement vérifier la formule précédente par un calcul direct. Transformons l'expression de $\frac{dG}{dn}$:

$$-\frac{dG}{dn} = \frac{r\cos\varphi}{r^3} + \frac{a}{\rho}\,\frac{r'\cos\psi}{r'^3}.$$

Or on a sur la sphère :

$$r'^3 = r^3 \frac{a^3}{\rho^3}.$$

D'où :

$$-\frac{dG}{dn} = \frac{r \cos \varphi}{r^3} + \frac{\rho^2}{a^2} \frac{r' \cos \psi}{r^3}$$

Mais :

$$r \cos \varphi = a - \rho \cos \theta$$

$$r' \cos \psi = \frac{a^2}{\rho} \cos \theta - a.$$

Remplaçons :

$$-\frac{dG}{dn} = \frac{a - \rho \cos \theta}{r^3} + \frac{\rho \cos \theta - \frac{\rho^2}{a}}{r^3}$$

$$-\frac{dG}{dn} = \frac{a^2 - \rho^2}{ar^3}.$$

On voit que $\frac{dG}{dn}$ est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$.

Cela posé, cherchons à résoudre le problème de Dirichlet pour le cas de la sphère. Il s'agit de construire une fonction V régulière en tous les points situés à l'intérieur de la sphère et satisfaisant aux conditions suivantes :

$\Delta V = 0$..... à l'intérieur,

$V =$ une fonction donnée..... à la surface

Appelons V la valeur de la fonction inconnue en un point M situé à l'intérieur de la sphère et V′ la valeur donnée de cette même fonction en un point M′ de la surface. Soient, d'autre part, $d\omega'$ un élément infinitésimal de cette surface et G la fonction de Green ayant le point M pour pôle. On a (§ 75) :

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int V' \frac{dG}{dn} d\omega',$$

le champ d'intégration étant la surface de la sphère. Cette formule permet de résoudre le problème que nous nous sommes posé. Mais il y a deux objections possibles :

1°..... $\frac{dG}{dn}$ existe-t-il ? Nous avons vu plus haut que oui.

2°..... la méthode suivie suppose que l'on admette d'avance l'existence de la solution cherchée.

Pour atteindre une rigueur parfaite, il nous faut établir que la fonction V construite au moyen de la formule précédente remplit bien toutes les conditions imposées à la fonction cherchée. C'est ce que nous allons faire. Nous sommes ainsi amenés à discuter une intégrale connue sous le nom d'*Intégrale de Poisson*.

86. On a :

$$-\frac{dG}{dn}=\frac{a^2-\rho^2}{ar^3}.$$

D'où :

$$V=\int\frac{(a^2-\rho^2)\,V'd\omega'}{4\pi ar^3}.$$

Posons :

$$\mu'=\frac{V'}{4\pi a};$$

On en déduit :

$$V=\int\frac{\mu'\,(a^2-\rho^2)}{r^3}\,d\omega'.$$

Comparons V à la fonction :

$$U=\int\frac{\mu' d\omega'}{r}$$

qui est le potentiel newtonien d'une couche de matière attirante répandue sur la surface de la sphère. Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point et ρ, θ, φ ses coordonnées polaires. On a :

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=\rho\cos\theta.$$

Grâce à ce changement de variables, V devient une fonction de ρ, θ, φ.

Étudions l'expression :

$$\rho\,\frac{\partial U}{\partial\rho}.$$

On a :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z}.$$

En effet :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Laissons alors θ et φ constants, mais donnons à ρ un accroissement infiniment petit $d\rho$. Nous passons ainsi du point dont les coordonnées sont ρ, θ, φ au point dont les coordonnées sont $\rho + d\rho$, θ, φ. On a :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

en appelant x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées cartésiennes des points M et M' (fig. 56) dont les coordonnées

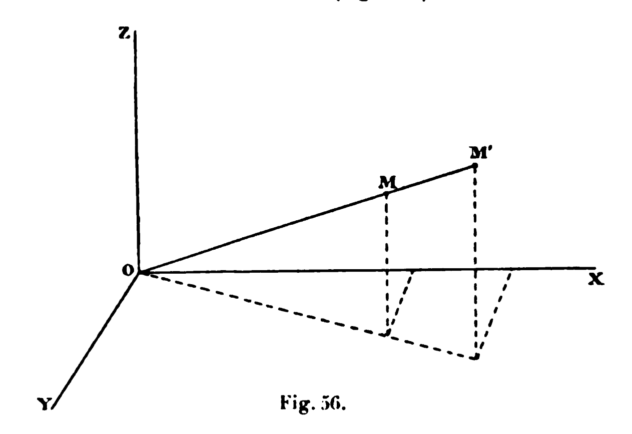


Fig. 56.

polaires sont ρ, θ, φ, et $\rho + d\rho$, θ, φ. Remarquons que dx, dy, dz sont les projections orthogonales de $d\rho$ sur les trois axes de coordonnées. D'où :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho}.$$

Nous pouvons remplacer :

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad d\rho$$

par des quantités proportionnelles. On conclut de là :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z}.$$

C'est ce que nous voulions établir.

On a :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = \rho \int \mu' \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \rho} d\omega'.$$

D'autre part, on peut écrire :

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2 a\rho \cos \theta$$

en posant (fig. 55) :

$$\theta = \widehat{MOM'}$$

On tire de là :

$$r dr = \rho d\rho - a \cos \theta d\rho$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{\rho - a \cos \theta}{r}.$$

Par suite :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \rho} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \rho} = \frac{a \cos \theta - \rho}{r^3}.$$

Donc :

$$2 \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = \int \mu' \frac{2 a\rho \cos \theta - 2 \rho^2}{r^3} d\omega' = \int \mu' \frac{a^2 - \rho^2 - r^2}{r^3} d\omega'.$$

Or :

$$U = \int \frac{\mu'}{r} d\omega'$$

et :

$$V = \int \mu' \frac{a^2 - \rho^2}{r^3} d\omega'.$$

D'où :

$$U + 2\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = V.$$

Cette relation va jouer un rôle essentiel dans nos raisonnements.

La fonction U est un potentiel newtonien dû à une surface attirante. Donc U a des dérivées partielles de tous les ordres qui sont finies et continues, en tout point situé à l'intérieur de la sphère. De plus on a :

$$\Delta V = 0$$

dans le même domaine. Maintenant il est clair que $\rho \frac{dU}{d\rho}$ est aussi une fonction continue et possède des dérivées à l'infini. En outre, on a :

$$\Delta\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = 0.$$

En effet, de la formule :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z},$$

on déduit :

$$\Delta\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = x\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + z\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) + 2\Delta U$$

et, comme on a :

$$\Delta U = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0,$$

on peut écrire :

$$\Delta\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = 0.$$

La relation :

$$\Delta V = 0$$

est ainsi vérifiée.

En un mot, il résulte des remarques précédentes que V est une fonction harmonique dans la sphère.

Il nous reste à constater que V (x, y, z) tend vers V' (x', y', z') quand le point M (x, y, z) tend par un chemin quelconque vers le point M' (x', y', z') de la surface de la sphère.

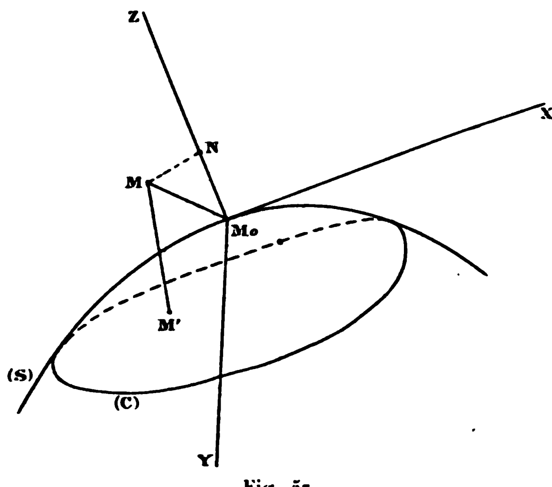


Fig. 57.

Rappelons d'abord un résultat établi dans la théorie des surfaces attirantes. Soient (fig. 57) :

S	une surface attirante.
M_0	un point fixe de S.
M	un point de l'espace.
x, y, z	les coordonnées de M.
MM_0	la droite qui joint M à M_0.
M'	un point de S.
x', y', z'	les coordonnées de M'.
μ'	une fonction de x', y', z'.
μ_0	la valeur de μ' en M_0.

Supposons que le point M tende vers le point M_0 en suivant la droite fixe MM_0. Prenons la normale à S en M_0 pour axe des z et le plan tangent à S en M_0 pour plan des x, y, les axes de coordonnées étant d'ailleurs rectangulaires. Considérons maintenant l'intégrale :

$$J = \int \frac{z\mu' d\omega'}{r^3},$$

r étant la distance MM'. Si les axes sont quelconques, on a :

$$J = \int \frac{\overline{NM}\mu' d\omega'}{r^3},$$

N étant la projection de M sur la normale en M_0, projection faite parallèlement au plan tangent en M_0. Le champ d'intégration est toujours la surface S dont $d\omega'$ est un élément. Cela posé, on sait que :

$$\lim_{z=0} J = 2\pi\mu_0.$$

Appliquons cela.

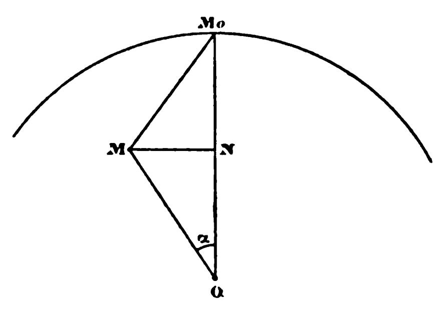


Fig. 58.

On a (fig. 58) :

$$V = (a^2 - \rho^2) \int \frac{\mu' d\omega'}{r^3}$$

$$V = \frac{a^2 - \rho^2}{\overline{M_0N}} \int \frac{\mu' \overline{M_0N} d\omega'}{r^3}.$$

Si M tend vers M_0, N y tend aussi. Dans ce cas, on a :

$$\lim \frac{a^2 - \rho^2}{\overline{M_0N}} = \lim (a + \rho) = 2a,$$

car :

$$\overline{M_0N} = a - \overline{ON} = a - \rho \cos \alpha,$$

α étant l'angle MON, ce qui prouve que :

$$\lim M_0N = \lim (a - \rho).$$

D'autre part, en vertu du lemme rappelé plus haut, on a :

$$\lim \int \frac{\mu' \overline{M_0 X} d\omega'}{r^3} = 2\pi\mu_0.$$

D'où :

$$\lim V = 4\pi a \mu_0$$

ce qui donne bien :

$$\lim V = V'.$$

En définitive, il est prouvé que la fonction V résout le problème de Dirichlet dans le cas de la sphère.

87. Reprenons la formule :

$$V = U + 2\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

On sait que U est le potentiel dû à une certaine couche de matière attirante répandue sur la surface de la sphère. Aucune des masses qui engendrent U n'est située à l'intérieur de la sphère. Donc (§ **23**), dans ce domaine, U est développable en série de polynômes sphériques :

$$U = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots\ldots + H_n + \ldots$$

On peut écrire :

$$H_n = \rho^n X_n,$$

X_n étant une fonction sphérique. D'où

$$U = X_0 + \rho X_1 + \rho^2 X_2 + \ldots + \rho^n X_n + \ldots$$

Les quantités X_i ne dépendent que de θ et φ. D'où :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = \rho X_1 + 2\rho^2 X_2 + \ldots + n\rho^n X_n + \ldots$$

Ces deux séries sont convergentes pour :

$$\rho < a.$$

On déduit de là qu'à l'intérieur de la sphère V est développable en série de polynômes sphériques :

$$V = \Sigma (2n+1) \rho^n X_n = \Sigma (2n+1) H_n.$$

Ce développement est valable pour tout domaine contenu dans la sphère.

On ne peut pas, en général, modifier l'ordre des termes dans les séries précédentes et ordonner par rapport à x, y, z. Cependant cette opération est possible (§ **24**) si :

$$\rho < \lambda a,$$

λ étant une constante suffisamment petite. Donc V est une fonction holomorphe dans le voisinage du centre. Il en est de même d'ailleurs en tout autre point de la sphère, comme on le verrait en ordonnant les développements par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, si l'on appelle x_0 y_0 z_0 les coordonnées du point considéré.

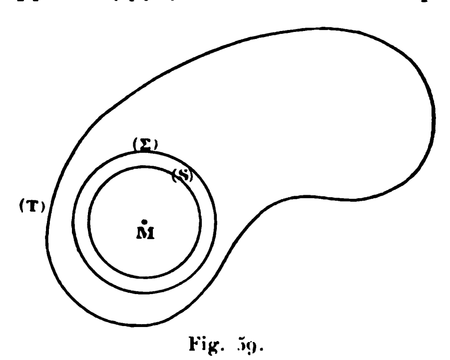


Fig. 59.

Tirons de là une importante conséquence. Soit un domaine T dans lequel une fonction V est harmonique. Prenons un point M quelconque à l'intérieur de ce domaine et entourons ce point (fig. 59) d'une sphère Σ assujettie seulement à ne pas sortir de T. La fonction V est harmonique dans Σ. Donc on peut trouver une nouvelle sphère S ayant pour centre le point M, contenue dans Σ et assez petite pour que V soit développable dans S en série entière procédant suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ (si l'on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées de M). *Donc la fonction V est holomorphe en tout point de T.*

88. Méthode de Thomson. — Envisageons une transformation ponctuelle de l'espace par rayons vecteurs réciproques. Plaçons (fig. 60) l'origine des coordonnées au pôle d'inversion O et supposons que la sphère directrice ait un rayon égal à l'unité de

longueur. Si M et M_1 sont deux points correspondants, on sait qu'ils sont en ligne droite avec l'origine et que l'on a :

$$\overline{OM}.\overline{OM_1} = 1.$$

Voyons les applications de cette méthode de transformation à l'étude du potentiel.

1°... *Cas d'un seul point attirant.* — Soient (fig. 61) M' un

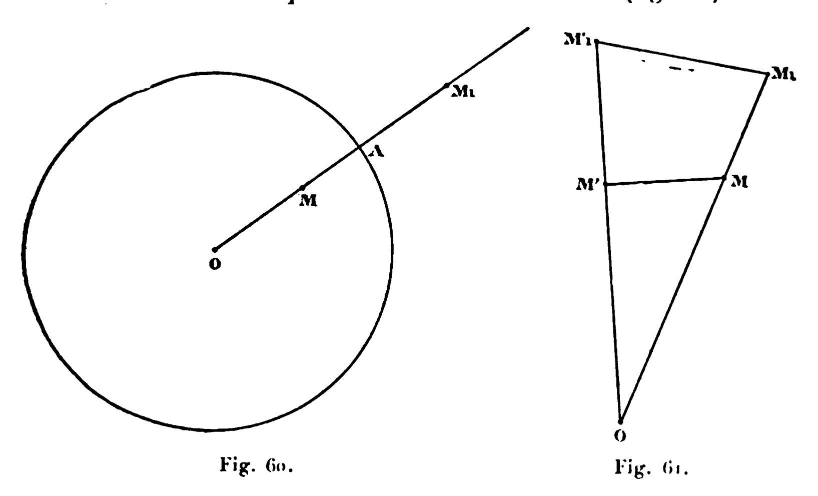


Fig. 60. Fig. 61.

point attirant et M un point attiré. Au point M' correspond le point M'_1 et au point M le point M_1. Posons :

$$\overline{OM} = \rho, \quad \overline{OM'} = \rho', \quad \overline{OM_1} = \rho_1, \quad \overline{OM'_1} = \rho'_1$$
$$\overline{MM'} = r, \quad \overline{M_1M'_1} = r_1.$$

On a :

$$\rho\rho_1 = \rho'\rho'_1 = 1$$

et :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{\rho'_1}{\rho}$$

à cause de la similitude évidente des triangles OMM' et $OM_1M'_1$.

Supposons que le point M' porte une masse m' et le point M'_1 une masse m'_1. Quant aux points M et M_1, leurs masses sont par hypothèse égales à $+1$. Alors, si nous appelons V le potentiel

dû à l'action de M' sur M et V_1 le potentiel dû à l'action de M'_1 sur M_1, nous avons :

$$V = \frac{m'}{r}, \quad V_1 = \frac{m'_1}{r_1}.$$

D'où :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{m'_1}{m'} \frac{V}{V_1}.$$

Or :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho'}.$$

Par suite :

$$\frac{m'_1}{m'} \frac{V}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho'}.$$

Choisissons m'_1 de telle façon que :

$$\frac{m'_1}{m'} = \frac{1}{\rho'} = \rho'_1.$$

Puisque m' est donné, on voit que m'_1 peut être déterminé. De plus, le rapport $\frac{m'_1}{m'}$ est indépendant de ρ. On a alors :

$$\frac{V}{V_1} = \rho_1, \quad \frac{V_1}{V} = \frac{1}{\rho_1} = \rho$$

c'est-à-dire :

$$V = \rho_1 V_1, \quad V_1 = \rho V.$$

2°... *Cas de plusieurs points formant un ensemble discret.* — Soient M un point attiré portant l'unité de masse et :

$$M_1\, M_2 \ldots\ldots M_i \ldots\ldots M_p$$

un système de p points attirants portant respectivement les masses :

$$m_1\, m_2 \ldots\ldots m_i \ldots\ldots m_p.$$

Le potentiel produit en M est :

$$V = \sum_1^p \frac{m_i}{r_i}$$

en désignant par r_i, la distance MM_i.

Appelons M' le point qui correspond à M dans l'inversion et :

$$M'_1\, M'_2 \ldots\ldots M'_i \ldots\ldots M'_p$$

ceux qui correspondent à :

$$M_1\, M_2 \ldots\ldots M_i \ldots\ldots M_p.$$

Posons en général :

$$\begin{array}{ll} OM = \rho, & OM_i = \rho_i \\ OM' = \rho', & OM'_i = \rho'_i \\ MM_i = r_i, & M'M'_i = r'_i. \end{array}$$

On a :

$$\rho\rho' = \rho_i\rho'_i = 1$$

et :

$$\frac{\rho'}{\rho_i} = \frac{\rho'_i}{\rho} = \frac{r'_i}{r_i}$$

pour toutes les valeurs de l'indice i depuis 1 jusqu'à p. Attachons maintenant à chaque point M'_i la masse m'_i déterminée par la relation :

$$\frac{m'_i}{m_i} = \frac{1}{\rho_i} = \rho'_i.$$

D'autre part, considérons le potentiel V' produit en M' par l'attraction des points M'_i :

$$V' = \sum_1^p \frac{m'_i}{r'_i}.$$

On a :

$$r'_i = r_i\,\frac{\rho'}{\rho_i}$$

$$\frac{m'_i}{r'_i} = \frac{m_i}{\rho_i}\,\frac{\rho_i}{r_i\rho'} = \frac{1}{\rho'}\,\frac{m_i}{r_i}.$$

D'où :

$$\rho' V' = V.$$

Comme on a :

$$\rho\rho' = 1,$$

on en déduit :

$$V' = \rho V.$$

3°... *Cas d'un volume attirant.* — Considérons un volume attirant T où la densité de la matière est μ en chaque élément de volume $d\tau$ dont le centre de gravité est le point M. Soit P un point attiré portant l'unité de masse. Appelons r la distance MP. Le potentiel produit en P est :

$$V = \int_{(T)} \frac{\mu d\tau}{r}.$$

Transformons par inversion. Le volume T devient un volume T' où la densité de la matière est μ' en chaque élément de volume $d\tau'$ dont le centre de gravité est le point M'. Soit P' le point qui correspond à P. Appelons r' la distance M'P'. Le potentiel produit en P' par T' est :

$$V' = \int_{(T')} \frac{\mu' d\tau'}{r'}.$$

Le point M' est supposé, lui aussi, porter l'unité de masse. Quant à μ', on peut le choisir arbitrairement. Posons :

$$\frac{\mu' d\tau'}{\mu d\tau} = \frac{1}{\rho_M} = \rho'_{M'},$$

en appelant ρ_M la distance OM et $\rho'_{M'}$ la distance OM'. Désignons encore par ρ la distance OP et par ρ' la distance OP'. On a :

$$\rho\rho' = \rho_M \rho'_{M'} = 1$$

et :

$$\frac{\rho'}{\rho_M} = \frac{\rho'_{M'}}{\rho} = \frac{r'}{r}.$$

D'où :

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{\rho'^3_{M'}}{\rho^3_M} = \rho'^6_{M'} = \frac{1}{\rho^6_M}.$$

Prenons donc :

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{\rho'^5_{M'}} = \rho^5_M.$$

Alors la relation :

$$\frac{\mu' d\tau'}{\mu d\tau} = \frac{1}{\rho_M} = \rho'_{M'}$$

est bien vérifiée. D'où :

$$\frac{\mu' d\tau'}{r'} = \frac{\mu d\tau}{r}\,\rho'_{M'}\,\frac{\rho}{\rho'_{M'}} = \rho\,\frac{\mu d\tau}{r}.$$

On en conclut :

$$V' = \rho V, \quad V = \rho' V'.$$

4° *Cas d'une surface attirante.* — Conservons les mêmes notations, en remplaçant seulement les éléments de volume $d\tau$ et $d\tau'$ par les éléments de surface $d\omega'$ et $d\omega'$. On a ici :

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \rho'^4_{M'} = \frac{1}{\rho^4_M}.$$

On prend donc :

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{\rho'^3_{M'}} = \rho^3_M$$

et l'on a encore :

$$\frac{\mu' d\omega'}{\mu d\omega} = \frac{1}{\rho_M} = \rho'_{M'}.$$

D'où :

$$V' = \rho V, \quad V = \rho' V'.$$

5° *Cas d'une ligne attirante.* — Conservons toujours les mêmes notations, mais en remplaçant les éléments de surface $d\omega$ et $d\omega'$ par les éléments de longueur ds et ds'. On a ici :

$$\frac{ds'}{ds} = \rho'^2_{M'} = \frac{1}{\rho^2_M}.$$

On prend donc :

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{\rho'_{M'}} = \rho_M$$

et l'on a encore :

$$\frac{\mu' ds'}{\mu ds} = \frac{1}{\rho_M} = \rho'_{M'}.$$

D'où :

$$V' = \rho V, \quad V = \rho' V'.$$

5° REMARQUE. — Dans tous les cas examinés, on a :

$$V' = \rho V.$$

Supposons que P′ s'éloigne à l'infini, alors P tend vers l'origine, ρ tend vers zéro et V reste fini. Donc V′ tend vers zéro.

Supposons maintenant que P s'éloigne à l'infini. Alors ρV tend vers la valeur A de la masse totale qui engendre le potentiel V. Il en est donc de même de V′ quand P′ tend vers l'origine.

89. Equivalence des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur. — Soit une fonction V_1 (fig. 62) harmonique à l'extérieur d'une

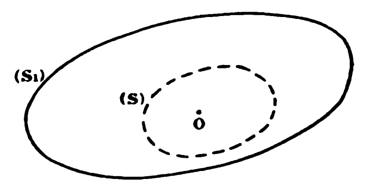


Fig. 62.

surface fermée S_1, s'annulant à l'infini et prenant sur S_1 des valeurs données. Admettons que les dérivées premières de V_1 restent finies et continues même sur S_1. On peut alors construire une fonction définie, uniforme et continue à l'intérieur de S_1, qui prenne sur S_1 les mêmes valeurs que V_1 et qui possède à l'intérieur de V_1 des dérivées continues des trois premiers ordres. Cette nouvelle fonction peut être regardée comme un prolongement de la fonction V_1. On a :

$$\Delta V_1 = 0 \ldots \text{ à l'extérieur de } S_1$$
$$\Delta V_1 \neq 0 \ldots \text{ à l'intérieur de } S_1.$$

De plus les dérivées de V_1 sont en général discontinues quand on traverse la surface S_1. Dans ces conditions, il est clair que V_1 peut être regardé comme la somme de deux potentiels, l'un dû à une couche attirante répandue sur S_1, l'autre dû à des masses

distribuées à l'intérieur de S_1. Effectuons maintenant la transformation de Thomson. Le potentiel V_1 devient un potentiel V et, en deux points correspondants on a la relation :

$$V_1 = \rho V.$$

Par cette même transformation, la surface S_1 devient une nouvelle surface fermée S et, si le pôle d'inversion a été pris à l'intérieur de S_1, l'espace exterieur à S_1 devient l'espace intérieur à S. Le potentiel V est dû à des masses extérieures à S ou situées sur S. Donc, à l'intérieur de S, on a :

$$\Delta V = 0.$$

Donc V est harmonique. De plus V prend sur S des valeurs qui sont données par la relation :

$$V = \frac{1}{\rho} V_1.$$

On voit par là comment on peut ramener le problème extérieur de Dirichlet au problème intérieur, et réciproquement.

J'indiquerai seulement, pour terminer, que, si la fonction :

$$V_1(x, y, z,)$$

est harmonique à l'extérieur de S_1, la fonction :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\rho} V_1 \left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, \frac{z}{\rho^2}\right)$$

est harmonique à l'intérieur de S. C'est ce que nous venons de voir. On peut le vérifier par un calcul direct.

90. **Cas du potentiel logarithmique.** — Soit un potentiel :

$$V = \Sigma\, m \log \frac{r_0}{\rho}$$

dû à des masses quelconques. Faisons une inversion comme ci-dessus, mais en donnant des masses égales à deux points correspondants. On a :

$$V_1 = \Sigma m \log \frac{r_0}{\rho_1}.$$

D'où :

$$V_1 - V = \Sigma m \log \frac{r}{r_1} = \Sigma m \log \frac{\rho'}{\rho_1},$$

en reprenant les mêmes notations que pour le cas d'un point attirant au paragraphe 88. On peut écrire :

$$V_1 = V + \Sigma m \log \frac{r_0}{r_1} - \Sigma m \log \frac{r_0}{\rho'}.$$

On voit que la différence $V_1 - V$ ne dépend que de la position et de la valeur des masses attirantes données.

La conclusion est la même, qu'il s'agisse de points discrets, de surfaces ou de lignes.

On verrait, comme pour le potentiel newtonien, qu'on peut ramener le problème de Dirichlet intérieur au problème extérieur, et réciproquement. Seulement, ici, si :

$$V(x, y, z,)$$

est harmonique,

$$V\left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, \frac{z}{\rho^2}\right)$$

l'est aussi.

91. Propriétés des fonctions harmoniques à l'infini. — Considérons l'espace extérieur à une sphère Σ de rayon 1 (fig. 63). Soient M et M_1 deux points correspondants dans l'inversion définie par Σ prise comme sphère directrice. Posons :

$$\rho = OM, \quad \rho_1 = OM_1.$$

On a :

$$\rho\rho_1 = 1.$$

Si V_1 est une fonction harmonique à l'extérieur de Σ, la méthode de Thomson permet de construire une fonction V harmonique à l'intérieur de Σ. Entre les valeurs de V et de V_1 en deux points correspondants, on a la relation :

$$V = \rho_1 V_1.$$

Remarquons que V est harmonique même au voisinage de O,

pourvu que V_1 s'annule à l'infini et s'y comporte régulièrement comme un potentiel newtonien.

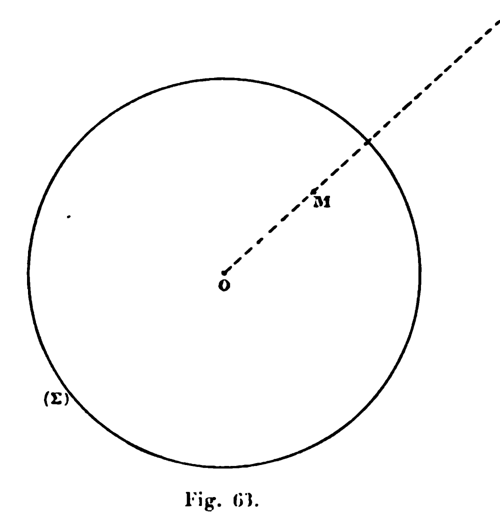


Fig. 63.

Cela posé, on peut écrire (§ 87).

$$V = \Sigma (2n+1)\,\Pi_n = \Sigma (2n+1)\,\rho^n X_n.$$

D'où :

$$V_1 = \frac{V}{\rho_1} = \Sigma (2n+1) \frac{X_n}{\rho_1^{n+1}}$$

$$V_1 = \Sigma (2n+1) \frac{\Pi'_n}{\rho_1^{2n+1}}$$

en posant :

$$\Pi'_n = \rho_1^n X_n.$$

Le développement de V est valable à l'intérieur de Σ et celui de V_1 l'est à l'extérieur.

92. Remarque. — Considérons (fig. 64) une fonction V harmonique en tout point M situé à l'intérieur d'une sphère S, sauf peut-être au centre O.

Posons :

$$J = \int_{(\Sigma)} \frac{V d\omega}{4\pi\rho^2},$$

Σ étant une sphère de rayon ρ concentrique à S et tout entière intérieure à cette dernière sphère. On voit que J représente la

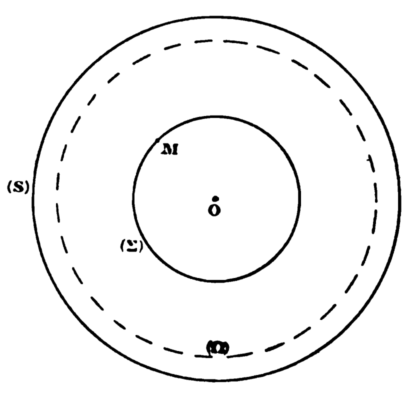


Fig. 64.

valeur moyenne de V sur Σ. Envisageons maintenant une sphère Ω concentrique aux premières et de rayon 1. Soit :

$$d\sigma = \frac{d\omega}{4\pi\rho^2}.$$

Alors $d\sigma$ est un élément de la sphère Ω. D'où :

$$J = \int_{(\Omega)} V d\sigma.$$

On en déduit :

$$\frac{dJ}{d\rho} = \int_{(\Omega)} \frac{dV}{d\rho} d\sigma = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{(\Sigma)} \frac{dV}{dn} d\omega$$

$$\rho^2 \frac{dJ}{d\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{dV}{dn} d\omega.$$

Considérons deux sphères Σ et Σ' correspondant à deux valeurs différentes de ρ, ρ et ρ'. Entre ces deux sphères, V est harmonique. D'où :

$$\int_{\Sigma} \frac{dV}{dn} d\omega = \int_{\Sigma'} \frac{dV}{dn} d\omega.$$

Par suite :

$$\rho^2 \frac{dJ}{d\rho} = C^{te} = -C.$$

On en déduit :

$$\frac{dJ}{d\rho} = -\frac{C}{\rho^2}$$

$$J = \frac{C}{\rho} + A,$$

A étant une nouvelle constante.

Si V est harmonique même en O, J conserve une valeur finie lorsque ρ tend vers zéro, car si on pose alors :

$$|V| < N$$

on a évidemment :

$$|J| < 4\pi N.$$

Donc :

$$C = 0.$$

La même conclusion subsiste, si, V n'étant pas harmonique en O, on peut cependant réaliser l'inégalité :

$$|V| < \frac{N}{\rho^{1-\epsilon}}.$$

Dans ce cas en effet, dès que ρ serait assez petit, on aurait :

$$|V| < J.$$

si C était différent de zéro. Mais cela est impossible puisque J est la valeur moyenne de V. D'où :

$$C = 0.$$

D'ailleurs la conclusion ne serait plus exacte dans d'autres cas, du moins en général. Prenons en effet par exemple :

$$V = \frac{1}{\rho}.$$

On a ici :

$$J = \int \frac{d\omega}{4\pi\rho^3} = \frac{4\pi\rho^2}{4\pi\rho^3} = \frac{1}{\rho}.$$

D'où :

$$C = 1.$$

93. Théorème analogue à celui de Laurent. — Soit V une fonction harmonique dans l'espace compris entre deux sphères concentriques S_0 et S_1 dont les rayons sont respectivement ρ_0 et ρ_1 ($\rho_0 < \rho_1$). *Cette fonction est susceptible d'un développement en série analogue à celui qui est connu sous le nom de formule de*

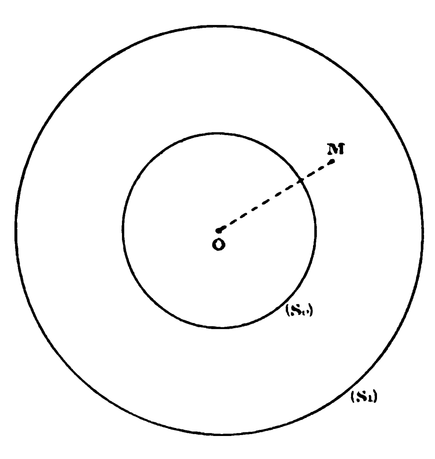


Fig. 65.

Laurent pour les fonctions analytiques holomorphes dans une couronne circulaire.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M situé entre les sphères S_0 et S_1. Posons (fig. 65) :

$$\rho = \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nous supposerons, ce qui est permis évidemment, que V reste finie et continue ainsi que ses dérivées sur S_0 et S_1 ; cela revient à dire que V est harmonique dans un espace un peu plus grand que celui que nous considérons. Dans ce cas, on peut, d'une infinité de façons, construire une fonction W jouissant des propriétés suivantes :

1°..... W est défini à l'intérieur de S_0.

2°..... Si l'on considère une fonction Θ qui coïncide avec V entre S_0 et S_1 et avec W à l'intérieur de S_0, Θ présente tous les caractères de continuité des fonctions harmoniques régulières.

Posons maintenant :

$$\mu' = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Theta$$

et

$$U = \int_{(S_1)} \frac{\mu' d\tau'}{r}.$$

On a :

$$\Delta U = \Delta\Theta = \Delta W \ldots\ldots \text{ pour } \rho < \rho_0$$
$$\Delta U = \Delta\Theta = \Delta V = 0 \ldots\ldots \text{ pour } \rho_0 < \rho < \rho_1$$
$$\Delta U = 0 \ldots\ldots \text{ pour } \rho > \rho_1.$$

Or on peut écrire :

$$V = (\Theta - U) + U \ldots\ldots \text{ pour } \rho_0 < \rho < \rho_1.$$

A l'intérieur de S_1, on a:

$$\Delta(\Theta - U) = 0,$$

d'où (§ 87) :

$$\Theta - U = \Sigma(2n+1)\Pi_n = \Sigma(2n+1)\rho^n X_n.$$

Ce développement est valable pour :

$$\rho < \rho_1.$$

Cela posé, U est un potentiel newtonien engendré par des masses situées toutes à l'intérieur de S_0. Donc, pour :

$$\rho_0 < \rho < \rho_1,$$

on a (§ 91) :

$$U = \Sigma \frac{\Pi'_n}{\rho^{2n+1}} = \Sigma \frac{X'_n}{\rho^{n+1}}.$$

On conclut de là :

$$V = \Sigma(2n+1)\Pi_n + \Sigma \frac{\Pi'_n}{\rho^{2n+1}}$$

ou encore :

$$V = \Sigma(2n+1)\rho^n X_n + \Sigma \frac{X'_n}{\rho^{n+1}}.$$

Ce développement, dont l'analogie avec celui de Laurent est

manifeste, est valable à l'intérieur du domaine où V est harmonique, c'est-à-dire pour :

$$\rho_0 < \rho < \rho_1.$$

94. Je dis que le développement précédent n'est possible que d'une seule manière. Cela peut paraître paradoxal, car le choix de W comporte beaucoup d'arbitraire. Néanmoins, voici la preuve de ce fait.

Commençons par démontrer une importante propriété des polynômes sphériques. Posons :

$$\Pi_n = \rho^n X_n$$
$$\Pi_p = \rho^p X_p,$$

X_n et X_p étant deux fonctions sphériques. Considérons une sphère Ω de rayon ρ ayant pour centre l'origine et comparons son élément infinitésimal $d\omega$ à celui de la sphère Σ concentrique et de rayon 1. Si l'on appelle ρ, θ, φ les coordonnées polaires d'un point, on a :

$$d\omega = \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \rho^2 d\sigma.$$

D'autre part, on a :

$$\int_{(\Omega)} \left(\Pi_n \frac{d\Pi_p}{dn} - \Pi_p \frac{d\Pi_n}{dn}\right) d\omega = 0$$

en vertu de la formule de Green, car :

$$\Delta\Pi_n = 0, \quad \Delta\Pi_p = 0.$$

Mais ici :

$$\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial\rho};$$

d'où :

$$\int_{(\Sigma)} \left(\Pi_n \frac{\partial\Pi_p}{\partial\rho} - \Pi_p \frac{\partial\Pi_n}{\partial\rho}\right) d\sigma = 0.$$

Or :

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\rho} = p\rho^{p-1}X_p, \quad \frac{\partial\Pi_n}{\partial\rho} = n\rho^{n-1}X_n.$$

Remplaçons ; il vient :

$$(p-n)\rho^{p+n-1}\int_{(\Sigma)} X_n X_p d\sigma = 0.$$

Donc, si $n \neq p$, on a :

$$\int_{(\Sigma)} X_n X_p d\sigma = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Sigma X_n X_p \sin\theta d\theta d\varphi = 0.$$

Il est clair que cela n'est plus vrai si $n = p$.

Supposons maintenant qu'il y ait deux développements possibles pour une fonction V harmonique entre deux sphères concentriques S_0 et S_1. Posons :

$$Y_n = \rho^n X_n + \frac{X'_n}{\rho^{n+1}}.$$

Notre hypothèse implique qu'on puisse écrire :

$$\Sigma Y_n = 0$$

en retranchant l'un de l'autre terme à terme les deux développements distincts de la même fonction. Or je dis que cette conséquence est absurde. En effet, nous savons que la série ΣY_n est uniformément convergente comme étant la différence de séries qui le sont. Multiplions alors les deux membres de l'égalité :

$$\Sigma Y_n = 0$$

par Y_p et intégrons sur la sphère Σ. On a :

$$\sum \int_{(\Sigma)} Y_n Y_p d\sigma + \int_{(\Sigma)} Y^2_p d\sigma = 0$$

en permutant les signes Σ et $\int$, comme cela est permis à cause de l'uniformité de la convergence. Dans l'égalité précédente, le signe Σ ne porte que sur les termes pour lesquels on a :

$$n \neq p.$$

Mais on a :

$$\int_\Sigma Y_n Y\, d\sigma = 0.$$

D'où :

$$\int_{(\Sigma)} Y^2_p d\sigma = 0.$$

On en conclut :

$$Y_p \equiv 0.$$

Cela a lieu pour toutes les valeurs de l'indice p. Donc, si l'on pose :

$$V = \Sigma Y'_n$$
$$V = \Sigma Y''_n,$$

on a :

$$Y'_n \equiv Y''_n.$$

Le développement étudié n'est donc possible que d'une seule manière.

95. Remarques. — Considérons une fonction V harmonique à l'extérieur d'une sphère Σ_0 de rayon ρ_0 sauf peut-être à l'infini. On peut écrire :

$$V = \Sigma \rho^n X_n + \Sigma \frac{X'_n}{\rho^{n+1}}.$$

Ce développement est valable dans l'espace compris entre la sphère Σ_0 et une sphère quelconque dont le rayon est plus grand que ρ_0.

Supposons maintenant que l'on puisse réaliser, pour toute valeur de ρ, l'inégalité :

$$|V| < \varphi(\rho) \rho^n,$$

$\varphi(\rho)$ tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment. Je dis que, dans le développement de V, on aura :

$$X_n = 0.$$

En effet, on peut écrire :

$$\int_{(\Sigma)} \frac{VX_n}{\rho^n} d\sigma = \int_{(\Sigma)} \frac{X^2_n \rho^n}{\rho^n} d\sigma + \int_{(\Sigma)} \frac{X'_n X_n}{\rho^{2n+1}} d\sigma$$
$$+ \sum \int_{(\Sigma)} X_p \rho^p \frac{X_n}{\rho^n} d\sigma + \sum \int_{(\Sigma)} \frac{X'_p}{\rho^{p+1}} \frac{X_n}{\rho^n} d\sigma.$$

Dans cette formule, le signe $\sum$ porte sur des termes pour lesquels on a :

$$p \neq n.$$

On sait que la fonction X_n est finie. Écrivons donc :

$$|X_n| < M.$$

D'autre part, on a supposé :

$$\frac{|V|}{\rho^n} < \varphi(\rho).$$

D'où :

$$\left| \int_{(\Sigma)} \frac{VX_n}{\rho^n} d\sigma \right| < 4\pi M \varphi(\rho).$$

Maintenant, on a :

$$\int_{(\Sigma)} X_p X_n d\sigma = 0, \quad \int_{(\Sigma)} X'_p X_n d\sigma = 0$$

si $p \neq n$. De là résultent les relations :

$$\sum \int_{(\Sigma)} X_p \rho^p \frac{X_n}{\rho^n} d\sigma = 0$$

$$\sum \int_{(\Sigma)} \frac{X_p}{\rho^{p+1}} \frac{X_n}{\rho^n} d\sigma = 0.$$

On en conclut :

$$4\pi M \varphi(\rho) > \left| \int_{(\Sigma)} X^2_n d\sigma + \frac{1}{\rho^{2n+1}} \int_{(\Sigma)} X_n X'_n d\sigma \right|.$$

Faisons croître ρ indéfiniment. Le second terme du second membre tend vers zéro et il en est de même du premier membre. On a donc à la limite :

$$\int_{(\Sigma)} X^2_n d\sigma \leq 0.$$

D'où, forcément :

$$\int_{(\Sigma)} X^2_n d\sigma = 0,$$

ce qui implique :

$$X_n \equiv 0.$$

La proposition énoncée est établie.

Voici une application. Supposons que l'on ait :

$$|V| < K\rho^n,$$

K étant une certaine constante positive. On peut écrire :

$$|V| < \frac{K}{\rho^p}\rho^{n+p},$$

quel que soit p. Prenons :

$$\varphi(\rho) = \frac{K}{\rho^p}.$$

On est dans le cas signalé plus haut. D'où :

$$X_{n+p} = 0,$$

pour toute valeur positive de p. Dans ce cas, on a :

$$V = X_0 + \rho X_1 + \ldots\ldots + \rho^n X_n + \sum_1^\infty \frac{X'_n}{\rho^{n+1}}$$

pour toute valeur de ρ supérieure à ρ_0. La valeur principale de V à l'infini est alors :

$$X_0 + \rho X_1 + \ldots\ldots + \rho^n X_n;$$

c'est un polynôme.

Si la fonction V est en outre harmonique et régulière à l'intérieur de Σ_0, on a simplement :

$$V = X_0 + \rho X_1 + \rho^2 X_2 + \ldots\ldots + \rho^n X_n$$

et alors V *est un polynôme*.

Si enfin V est une fonction harmonique régulière dans tout l'espace, sauf à l'infini, et si l'on a :

$$|V| < K,$$

on voit que V se réduit à une constante X_0. C'est là un théorème analogue à celui qui est connu sous le nom de Liouville dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable imaginaire.

96. Autres remarques. — Soit une fonction V harmonique

à l'intérieur d'une sphère S_1 sauf au centre O. Entourons ce point d'une petite sphère S_0. On a :

$$V = \Sigma\rho^n X_n + \Sigma \frac{X'_n}{\rho^{n+1}},$$

pour ρ compris entre ρ_1 et ρ_0. Mais ρ_0 est quelconque. Donc ce développement est valable pour tout le domaine limité par S_1.

Si on a :

$$|V| < \frac{\varphi(\rho)}{\rho^{n+1}},$$

$\varphi(\rho)$ tendant vers zéro en même temps que ρ, on voit comme ci-dessus que X'_n est nul.

Donc si :

$$|V| < \frac{K}{\rho^{n+1}}$$

on peut écrire :

$$V = \Sigma\rho^n X_n + \frac{X'_0}{\rho} + \frac{X'_1}{\rho^2} + \ldots + \frac{X'_{n-1}}{\rho^n}.$$

La démonstration est la même que pour la proposition analogue du paragraphe précédent. Dans ce cas, le produit $\rho_n V$ reste fini à l'origine.

Si la fonction V est en outre harmonique et régulière à l'extérieur de S_1 et même à l'infini, on a simplement :

$$V = \frac{X'_0}{\rho} + \frac{X'_1}{\rho^2} + \ldots + \frac{X'_{n-1}}{\rho^n}.$$

Enfin si on a en plus :

$$|V| < \frac{K}{\rho},$$

V se comporte comme un potentiel à l'infini et alors on a :

$$V = \frac{X'_0}{\rho}$$

97. **Théorème de Harnack.** — Soit un domaine T. Considérons une suite de fonctions :

$$U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n, \ldots\ldots$$

définies dans ce domaine. Nous ferons les hypothèses suivantes :

1°... toutes les fonctions U sont harmoniques dans T.

2°... toutes les fonctions U sont positives dans T.

3°... on peut assigner un nombre positif K, indépendant de n et du point x, y, z choisi dans T, tel que :

$$U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n < K.$$

Voici une première conséquence. La série :

$$U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\ldots$$

est convergente en tout point de T. Sa somme est donc une fonction de x, y, z définie dans T. *Je dis que cette fonction est harmonique.*

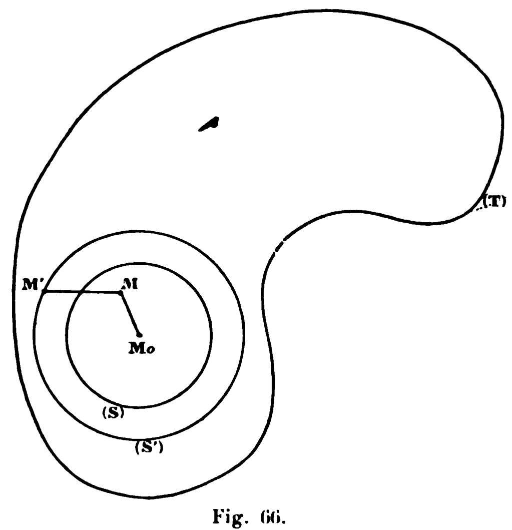


Fig. 66.

Prenons en effet, dans le domaine T, un point M_0 quelconque (fig. 66). Entourons ce point d'une première sphère S' située tout entière dans T, puis d'une seconde sphère S concentrique à la première et intérieure à celle-ci. Soit M' un point de S' placé au centre de gravité de l'élément $d\omega'$ de cette sphère. Appelons U_n' la valeur de U_n en M'. Prenons maintenant un point M à l'intérieur de S et appelons U_n la valeur de la fonction envisagée en ce point. Posons :

$$\overline{M_1M} = \rho, \quad \overline{MM'} = r$$

et désignons par a le rayon de S'. Puisque U_n est harmonique dans S'_1 on a :

$$U_n = \int_{(S')} U'_n \frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} d\omega'.$$

Posons :

$$A_n = \int_{(S')} U'_n d\omega'.$$

On a :

$$\sum_1^n A_n = \int_{(S')} \Sigma U'_n d\omega'.$$

D'où :

$$0 < \sum_1^n A_n < 4\pi a^2 K.$$

Donc la série :

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n + \ldots\ldots$$

dont les termes sont tous positifs, est convergente.

Posons :

$$\frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} = \theta > 0.$$

Il est clair que r ne s'annule jamais, si, comme nous le supposons, M reste dans S et M' sur S'. On a :

$$r > a - b,$$

en appelant b le rayon de S. Donc θ et ses dérivées successives sont des fonctions qui restent toutes finies. Posons :

$$|\theta| < B_0$$

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right| < B_1, \quad \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right| < B_1, \quad \left|\frac{\partial\theta}{\partial z}\right| < B. \quad \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right| < B_2, \text{ etc.}$$

On a :

$$U_n = \int_{(S')} U'_n \theta d\omega'.$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \int_{(S')} U'_n \frac{\partial\theta}{\partial x} d\omega'$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} = \int_{(S')} U'_n \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} d\omega'$$

... etc.

D'où :

$$U_n < B_0 A_n$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} < B_1 A_n$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} < B_2 A_n.$$

etc.

Considérons alors les séries :

$$U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \ldots\ldots + \frac{\partial U_n}{\partial x} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \ldots\ldots$$

. . . .

Elles sont toutes comparables à la série :

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n + \ldots\ldots$$

Donc elles sont toutes absolument et uniformément convergentes dans S. On conclut de là que leurs sommes sont des fonctions continues dans le même domaine et qu'elles ont respectivement pour valeurs

$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \text{ etc.}$$

Par suite U a des dérivées de tous les ordres dans S.

D'autre part, en vertu de ce qui précède, on peut écrire :

$$\Delta U = \Sigma \Delta U_n$$

et comme :

$$\Delta U_n = 0,$$

on déduit de là :

$$\Delta U = 0.$$

Donc la fonction U est harmonique dans T : le théorème de Harnack est démontré.

CHAPITRE VI

DOUBLES COUCHES

98. Définition d'une double couche. — On est amené à considérer dans la théorie du magnétisme des systèmes attirants formés de deux couches attirantes infiniment rapprochées et telles qu'en deux points correspondants de ces deux couches les densités soient égales, de signes contraires et très grandes. De pareils systèmes s'appellent *doubles couches*.

Précisons cette définition.

Soit M′ (fig. 67) un point attirant, m sa masse, et M un point attiré. Désignons par x′, y′, z′ les coordonnées du point M′, par x, y, z celles de M et par r la distance MM′. Le potentiel newtonien V dû à la masse m a pour valeur au point M :

$$V = \frac{m}{r}.$$

M″
M′
M

Fig. 67.

Supposons que, M restant fixe, M′ se déplace, et soient ξ, η, ζ les composantes de sa vitesse; les coordonnées x′, y′, z′ et le potentiel V sont alors fonctions du temps t. On a :

$$\xi = \frac{dx'}{dt}, \quad \eta = \frac{dy'}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz'}{dt},$$

et

$$\frac{dV}{dt} = m\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \zeta \right].$$

La variation dV du potentiel pendant un temps très petit dt est donc :

$$dV = m dt \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \zeta \right].$$

Pendant ce temps dt, le point M′ est venu en M″ et dV n'est autre que la différence de deux potentiels : l'un dû à la masse + m située en M″, l'autre à une masse égale située en M′ ; on peut aussi regarder dV comme la somme de deux potentiels : l'un dû à la masse + m située en M″, l'autre à la masse — m située en M′.

L'expression dV est donc encore un potentiel newtonien, celui qu'engendrent deux masses très voisines l'une de l'autre, égales et de signes contraires. C'est, par exemple, le potentiel d'un très petit aimant dont le pôle austral serait en M″ et le pôle boréal en M′.

Considérons de même un volume attirant; son potentiel est exprimé par l'intégrale :

$$V = \int \frac{\mu' d\tau'}{r}.$$

Supposons que chacun des points attirants M′ se déplace, pendant un temps très petit dt, d'une très petite quantité M′M″ dont les projections sur les trois axes de coordonnées soient ξdt, ηdt, ζdt ; la variation dV du potentiel sera :

$$dV = \int \mu' dt \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \zeta \right] d\tau'.$$

Cette intégrale peut être considérée comme le potentiel d'un volume magnétique, chaque élément $d\tau'$ de ce volume ayant un moment magnétique dont les projections sur les trois axes sont :

$$\mu' dt d\tau' \xi, \quad \mu' dt d\tau' \eta, \quad \mu' dt d\tau' \zeta.$$

Examinons enfin le cas d'une surface attirante ; son potentiel V est représenté par l'intégrale de surface :

$$V = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}.$$

En opérant comme précédemment, on est conduit à envisager l'intégrale

$$(1)\ldots\ldots \quad \int \mu' dt \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \zeta \right] d\omega'.$$

Cette intégrale peut être considérée comme représentant le potentiel dû à des masses attirantes répandues sur deux surfaces très voisines dont les points se correspondent de manière qu'en deux points correspondants les densités soient égales et de signes contraires; le segment déterminé par deux points correspondants a pour projections, sur les axes de coordonnées, $\xi dt, \eta dt, \zeta dt$, les quantités ξ, η, ζ étant des fonctions de x', y', z'; la direction de cette ligne varie donc d'un point à l'autre de la surface.

On peut encore considérer l'intégrale (1) comme le potentiel engendré par une infinité de petites aiguilles aimantées implantées dans la surface, la direction de l'aiguille qui perce la surface au point x', y, z' étant celle du vecteur ξ, η, ζ. Une telle distribution de masses attirantes s'appelle *feuillet magnétique*.

Il est clair que, dt étant très petit, le potentiel d'un feuillet magnétique est lui-même très petit, si la densité μ' est finie. En général on suppose la densité très grande de façon que le produit $\mu' dt$ soit fini. Le potentiel prend alors une valeur finie et on peut l'écrire :

$$\int \mu' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \zeta \right] d\omega';$$

μ' ayant dans cette expression une valeur finie et désignant la même chose que $\mu' dt$ dans l'expression (1).

Supposons maintenant que le vecteur ξ, η, ζ soit, en chaque point, normal à la surface, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\xi = \alpha', \quad \eta = \beta', \quad \zeta = \gamma',$$

α', β', γ' désignant les cosinus directeurs de la normale au point

x', y', z' ; le feuillet prend alors le nom de *double couche* et le potentiel s'exprime par l'intégrale :

$$\int \mu' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \alpha' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \beta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \gamma' \right] d\omega'.$$

99. Étude du potentiel d'une double couche. — Soit V le potentiel d'une double couche S ; on a :

$$V = \int \mu' \left[\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right] d\omega'.$$

ce qui peut s'écrire :

$$(1)\ldots\ldots \quad V = -\int \mu' \left[\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\omega'.$$

Posons :

$$U_1 = \int \frac{\alpha' \mu' d\omega'}{r}$$

$$U_2 = \int \frac{\beta' \mu' d\omega'}{r}$$

$$U_3 = \int \frac{\gamma' \mu' d\omega'}{r};$$

la fonction V prend la forme :

$$(2)\ldots\ldots \quad V = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right).$$

On voit par là que, les fonctions U_1, U_2, U_3 étant des potentiels de *simples couches*, c'est-à-dire des potentiels de surfaces attirantes ordinaires, la fonction V se comporte comme les dérivées premières de ces potentiels ; en particulier, la fonction doit éprouver une discontinuité quand le point attiré se déplace en franchissant la surface S. Nous étudierons plus loin cette discontinuité ; remarquons pour l'instant qu'en vertu de la formule (2), *le potentiel d'une double couche est une fonction harmonique en tout*

point de l'espace sauf sur la surface qui porte la double couche elle-même.

100. Avant d'étudier ce qui se passe sur la surface elle-même, donnons au potentiel une nouvelle forme qui nous sera très utile dans ce qui va suivre.

Reprenons la formule (1) et considérons l'expression

$$\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Cette expression n'est autre que la dérivée de $\frac{1}{r}$ prise suivant la normale à la surface dont les cosinus directeurs sont α', β', γ'; désignons, suivant la notation habituelle, cette dérivée par $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$; le potentiel V devient :

$$V = -\int \mu' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Soient alors (fig. 68) $d\omega'$ un élément de la surface, M' son centre de gravité, M le point attiré et φ l'angle de MM' avec la direction de la normale suivant laquelle on a différentié ; on a :

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{1}{r^2} \cos \varphi,$$

quel que soit le sens choisi sur la normale. Traçons maintenant la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre et appelons $d\sigma'$ l'aire de la portion de cette sphère découpée par le cône ayant pour sommet le point M et pour base l'élément $d\omega'$; la quantité $d\sigma'$ s'appelle l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point M. On a :

$$d\omega' = \pm \frac{d\sigma' . r^2}{\cos \varphi}.$$

Le double signe provient du double signe de $\cos \varphi$, c'est-à-dire

des deux sens possibles sur la normale. Comparons les deux formules précédentes ; il vient :

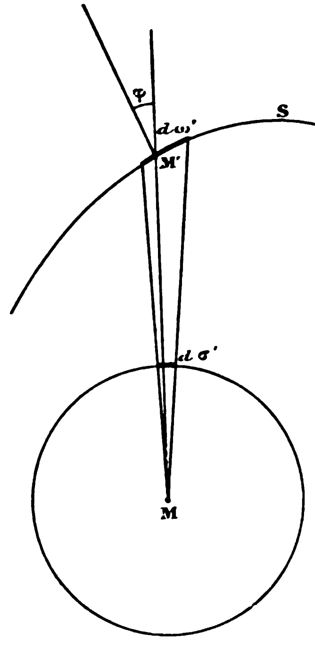


Fig. 68.

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\omega' = \frac{\cos\varphi}{r^2}d\omega' = \pm d\sigma',$$

et l'élément dV de potentiel dû à l'élément dω' a pour expression :

$$(1) \ldots\ldots \qquad dV = \mp \mu' d\sigma'.$$

On peut l'écrire :

$$(2) \ldots\ldots \qquad dV = \mu' d\sigma',$$

en convenant de donner un signe à dσ'. Pour voir comment nous devons choisir ce signe, traçons (fig. 69) les deux surfaces infiniment voisines ; appelons S_1 celle de ces deux surfaces où la densité est représentée par la fonction μ', et S_2 l'autre surface où la densité est représentée par — μ'. Soient a_1b_1 et a_2b_2 deux éléments correspondants d'égale étendue dω' ; soit enfin M le point attiré. Joignons le point M à un point de l'élément a_1b_1 et supposons que cette droite ne rencontre la surface S_2 qu'après avoir traversé S_1 ; il est clair que le potentiel dû à l'ensemble des deux éléments a, au point M, le signe de + μ', c'est-à-dire le signe de la densité sur l'élément a_1b_1. Il faut donc choisir le signe + dans la formule (1), c'est-à-dire considérer dσ' comme positif dans la formule (2).

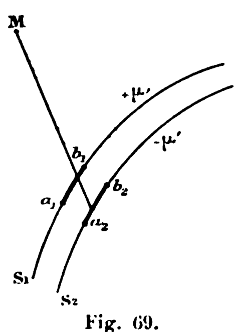


Fig. 69.

Au contraire, si la ligne qui joint le point M à l'élément dω' rencontre S_2 avant S_1, il faut considérer dσ' comme négatif.

En d'autres termes, si l'on appelle *côté positif* de S celui de S_1 et *côté négatif* celui de S_2, on prendra comme sens positif sur la normale

celui qui va du côté négatif au côté positif; par suite, l'élément $d\sigma'$ de la sphère de rayon 1 qui correspond à l'élément $d\omega'$ de S sera considéré comme positif si $d\omega'$ présente au point M son côté positif, et comme négatif si $d\omega'$ présente son côté négatif.

Cela posé, l'expression du potentiel dû à la double couche tout entière est

$$V = \int \mu' d\sigma'. \qquad (3)$$

C'est la formule que nous voulions établir.

101. Voyons maintenant ce qui se passe quand le point attiré M se déplace et franchit la surface.

Traitons d'abord le problème en supposant la densité constante. Le potentiel prend alors la forme :

$$V = \mu' \int d\sigma'.$$

Nous distinguerons deux cas :

1[er] *cas*.— Supposons (fig. 70) que la surface ait une forme et une position telles que toute droite issue de M ne puisse la rencon-

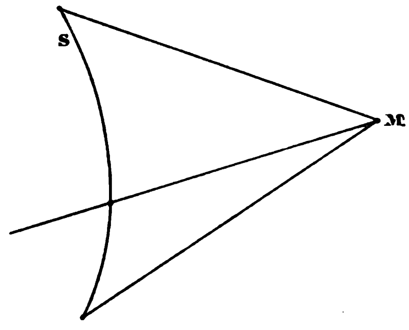


Fig. 70.

trer qu'en un seul point. Dans ce cas, ses éléments présentent tous le même côté au point M, les quantités $d\sigma'$ s'ajoutent, car elles ont toutes le même signe et leur somme est l'angle solide Ω sous lequel la surface est vue du point M. L'expression du potentiel est donc

$$V = \mu'\Omega,$$

l'angle solide Ω étant positif ou négatif suivant le côté de la surface qui est tourné vers le point M.

Un cas de ce genre est réalisé si la surface S est une portion de plan. On voit alors immédiatement ce qui arrive lorsque le point M se déplace et vient traverser le plan en un point de la double couche. Si le point M tend vers ce point du côté positif du plan, l'angle Ω tend vers 2π et le potentiel vers $-2\pi\mu$; si au contraire M tend vers ce même point du côté négatif, l'angle solide Ω tend vers -2π et le potentiel vers $-2\pi\mu$: le potentiel d'une double couche plane subit donc une augmentation brusque de $4\pi\mu$ quand on traverse la double couche en allant du côté négatif au côté positif.

2ᵉ *cas*. — Supposons (fig. 71) la surface S telle que certains rayons vecteurs issus de M puissent la couper en plusieurs

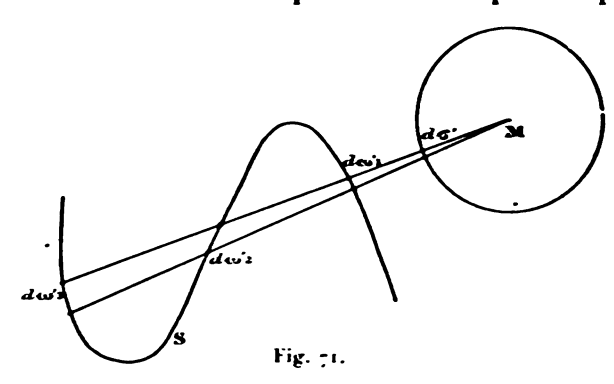


Fig. 71.

points. C'est le cas général. A un même élément $d\sigma'$ de la sphère de rayon 1 tracée autour du point M, peuvent correspondre plusieurs éléments $d\omega'_1$, $d\omega'_2$, $d\omega'_3$.... de S ; supposons que N de ces éléments tournent leur côté positif vers le point M et que N' tournent leur côté négatif vers ce même point M. Considérons alors $d\sigma'$ comme positif pour tous les éléments possibles de S ; nous pourrons écrire :

$$V = \mu' \int (N - N')\, d\sigma'.$$

C'est cette intégrale qu'il s'agit d'étudier au voisinage de la surface ; cette étude se fait sans peine dans le cas d'une surface fermée et le cas d'une surface quelconque non fermée s'y ramène.

Traitons donc d'abord le cas d'une surface fermée.

Trois circonstances peuvent se présenter : le point M peut être intérieur à la surface, à l'extérieur de la surface, sur la surface.

Supposons-le d'abord à l'intérieur. Tout rayon vecteur issu de M coupe la surface un nombre impair de fois (fig. 72) puisqu'on

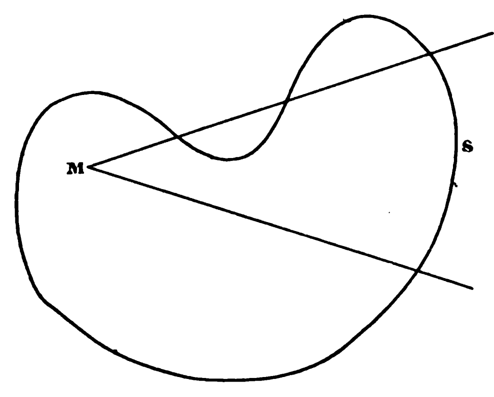


Fig. 72.

part de l'intérieur et qu'on va à l'extérieur. Les divers éléments de surface rencontrés successivement par un même rayon vecteur tournent alternativement leur côté positif et leur côté négatif vers le point M. On a donc :

$$N - N' = \pm 1$$

et

$$V = \mu' \int \pm \, d\sigma' = \pm \, 4 \pi \mu'.$$

On doit choisir le signe $+$ et écrire $V = 4\pi\mu'$ si c'est le côté positif de la surface qui est à l'intérieur ; on doit, au contraire, choisir le signe $-$ et écrire $V = -4\pi\mu'$ si le côté positif de la surface est le côté extérieur.

Supposons maintenant le point M à l'extérieur de la surface fermée ; on voit alors (fig. 73) que tout rayon vecteur issu de M coupe la surface en un nombre pair de points et que l'on a :

$$N - N' = 0,$$

d'où l'on conclut

$$V = 0.$$

Ainsi, en tout point extérieur à la surface, le potentiel est nul ; en tout point intérieur, il est constant et égal à $\pm 4\pi\mu'$; il fait donc un saut brusque de $4\pi\mu'$ quand on franchit la surface.

Supposons enfin le point M situé sur la surface ; supposons en

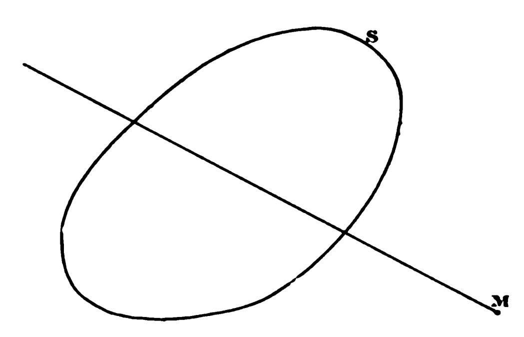


Fig. 73.

outre qu'en ce point la surface admette un plan tangent bien déterminé. Deux cas peuvent alors se présenter.

Dans le premier cas (fig. 74), la surface S est tout entière située d'un même côté du plan tangent. Tout rayon vecteur issu

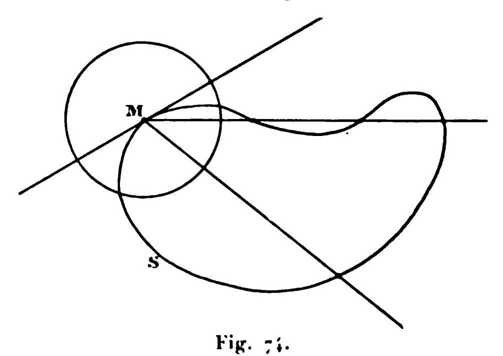


Fig. 74.

de M ne coupe la surface qu'en un nombre impair de points autres que M ; la différence $N - N'$ est donc égale à ± 1 et l'intégrale $\int d\sigma'$ n'est étendue qu'à une moitié de la sphère de rayon 1. Par suite, on a :

$$V = \pm 2\pi\mu'.$$

Dans le second cas (fig. 75), le plan tangent partage la surface

en deux parties : AM′B et AMB. A chacune d'elles correspond une moitié de la sphère de rayon 1. Pour toute la partie AM′B,

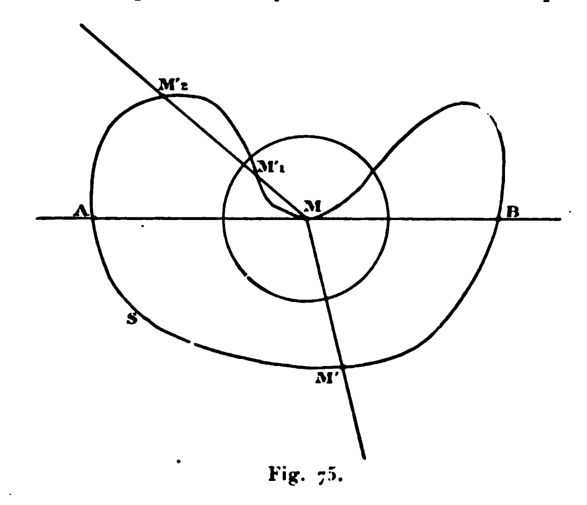


Fig. 75.

un rayon vecteur quelconque issu de M rencontre la surface un nombre impair de fois ; on a donc :

$$N - N' = \pm 1$$

et l'intégrale $\mu' \int d\sigma' \, (N - N')$, étendue à l'hémisphère correspondant, est égale à $\pm 2\pi\mu'$.

Pour la seconde partie AMB de la surface, un rayon vecteur issu de M rencontre S un nombre pair de fois ; on a donc :

$$N - N' = 0,$$

et l'intégrale $\mu' \int (N - N') \, d\sigma'$ étendue au deuxième hémisphère est nulle.

Ainsi, dans tous les cas, le potentiel a pour valeur en un point quelconque de la surface :

$$V = \pm 2\pi\mu'.$$

On choisit le signe + ou le signe — suivant que le côté positif de la surface est le côté interne ou le côté externe. On voit que la valeur constante du potentiel sur la surface est la demi-somme des valeurs constantes qu'il a à l'extérieur et à l'intérieur.

Quant aux dérivées, elles sont nulles à l'intérieur comme à l'extérieur et n'éprouvent donc aucune discontinuité quand le point M franchit la surface.

Le problème est ainsi complètement résolu, dans le cas où la densité est constante, en ce qui concerne les surfaces fermées ; passons au cas d'une surface quelconque.

102. Soit (fig. 76) S une double couche quelconque limitée par une courbe C ; cette surface S, ayant deux côtés, on peut en tracer une deuxième S′, limitée à la même courbe C et telle que l'ensemble de ces deux surfaces constitue une surface fermée. Traçons donc S′ et supposons que cette surface porte une double couche dont l'épaisseur et la densité soient les mêmes que celles de la double couche donnée. Appelons V le potentiel de S, V′ celui de S′ et W celui de la surface fermée ; on a :

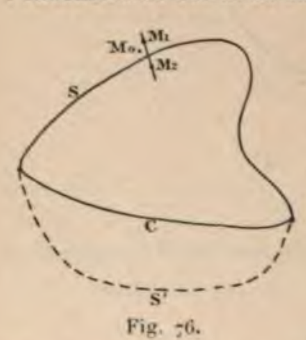


Fig. 76.

$$W = V + V'.$$

Considérons alors deux points M_1 et M_2 situés de part et d'autre de S et très voisins l'un de l'autre ; puis désignons par W_1, V_1, V'_1, les valeurs des trois fonctions considérées en M_1 et par W_2, V_2, V'_2 leurs valeurs en M_2 ; on a :

$$W_1 = V_1 + V'_1$$
$$W_2 = V_2 + V'_2,$$

d'où :

$$(1)\ldots\ldots \qquad W_1 - W_2 = (V_1 - V_2) + (V'_1 - V'_2).$$

W désignant le potentiel d'une double couche répandue sur une surface fermée, on sait, d'après ce qui précède, que l'on a :

$$W_1 - W_2 = \pm 4\pi\mu'.$$

De plus, les points M_1 et M_2 n'étant pas situés au voisinage de S′, la fonction V′ est continue en ces points et la différence $V'_1 - V'_2$ est infiniment petite ; l'égalité (1) devient donc :

$$V_1 - V_2 = \pm 4\pi\mu'.$$

Soit maintenant M_0 un point situé sur S entre les points M_1 et M_2; désignons par W_0, V_0, V'_0 les valeurs des trois potentiels en M_0, on a :

$$\left(\frac{W_1+W_2}{2}-W_0\right)=\left(\frac{V_1+V_2}{2}-V_0\right)+\left(\frac{V'_1+V'_2}{2}-V'_0\right).$$

Le deuxième terme du second membre est infiniment petit puisque V' est continu au voisinage de M_0; le premier membre est nul puisque W désigne le potentiel relatif à une surface fermée; donc le premier terme du second membre doit être infiniment petit et l'on voit que V_0 est la demi-somme de V_1 et V_2.

Ainsi, dans le cas où la densité est constante, qu'il s'agisse d'une surface fermée ou d'une surface quelconque, le potentiel d'une double couche croît brusquement de $4\pi\mu'$ quand on franchit la surface en allant du côté négatif au côté positif; sur la surface, il prend une valeur égale à la moyenne arithmétique des deux limites vers lesquelles il tend quand on s'approche indéfiniment de la surface du côté positif et du côté négatif.

Quant aux dérivées premières, elles n'éprouvent aucune discontinuité quand le point attiré traverse la double couche. Cela est bien évident puisque les dérivées de W sont partout nulles et que celles de V' restent continues au voisinage de S.

103. — Abordons maintenant le cas général où la densité est variable d'un point à l'autre de la surface.

Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

1° La fonction μ' reste finie et continue ; on peut alors trouver un nombre A fixe tel qu'en tout point de la surface on ait :

$$|\mu'|<A.$$

2° La surface proposée est telle qu'une droite quelconque ne la coupe qu'en un nombre limité de points ; nous appellerons N une limite supérieure de ce nombre.

Ces deux hypothèses nous fournissent une limite supérieure des valeurs du potentiel. Soit en effet $d\sigma'$ un élément de la sphère de rayon 1 considérée précédemment ; à cet élément correspon-

dont plusieurs éléments de la double couche (en nombre moindre que N) et par suite plusieurs éléments de l'intégrale :

$$V = \int \mu' d\sigma'.$$

Désignons par $\Sigma \mu' d\sigma'$ la somme de ces éléments ; on a :

$$|\Sigma \mu' d\sigma'| < NA d\sigma'.$$

et par conséquent :

$$|V| < \int NA d\sigma'.$$

c'est-à-dire :

$$|V| < 4\pi NA.$$

Cela posé, considérons une double couche quelconque S

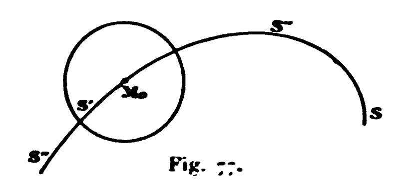


Fig. 77.

(fig. 77). Soit M le point attiré ; supposons que ce point tende vers un point M_0 de la surface où la densité est μ_0. Posons

$$W = \int \mu_0 d\sigma'.$$

C'est le potentiel d'une double couche dont la densité est constante. Comparons ce potentiel à celui de la double couche donnée :

$$V = \int \mu' d\sigma'.$$

Pour cela, envisageons l'intégrale

$$U = \int (\mu' - \mu_0)\, d\sigma'.$$

On a :

$$V = U + W.$$

Nous savons comment se comporte la fonction W ; elle a été étudiée au paragraphe précédent.

Étudions la fonction U et voyons comment elle se comporte

quand M tend vers M_0. Cette fonction est un potentiel de double couche dont la densité est variable, mais présente ceci de particulier qu'elle est nulle au point M_0. Nous allons montrer que ce potentiel reste continu quand le point M tend vers M_0.

Du point M_0 comme centre décrivons une sphère de rayon ρ. Cette sphère partage la surface S en deux parties : l'une S′ est comprise à l'intérieur de la sphère, l'autre S″ est constituée par le reste de la surface S.

Appelons U′ et U″ les potentiels dus respectivement à S′ et S″; on a :

$$U = U' + U''.$$

Désignons, en outre, par U_0, U'_0, U''_0 les valeurs de U, U′, U″, au point M_0. Nous voulons démontrer que l'on a

$$\lim |U - U_0| = 0$$

quand M tend vers M_0, c'est-à-dire que l'on peut prendre M assez voisin de M_0 pour satisfaire à l'inégalité

$$|U - U_0| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné à l'avance aussi petit qu'on le veut.

Pour cela, remarquons que l'on a

$$U - U_0 = U' - U'_0 + U'' - U''_0,$$

d'où :

(1)..... $$|U - U_0| < |U - U'_0| + |U'' - U''_0|.$$

Cela posé, observons que, μ' étant fini sur la surface S, $\mu' - \mu_0$ l'est aussi et que l'on peut assigner au module de cette différence une limite supérieure α sur la surface S′ ; on a donc, en tout point de S′ :

$$|\mu' - \mu_0| < \alpha;$$

d'où, en vertu d'une inégalité démontrée plus haut :

$$|U'| < 4\pi N\alpha$$

et

$$|U'_0| < 4\pi N\alpha.$$

Comme μ' est supposée continue, on peut restreindre assez la

surface S', c'est-à-dire prendre α assez petit, pour que l'on ait :

$$4\pi N\alpha < \frac{\varepsilon}{3},$$

et qu'ainsi l'on ait :

(2) ..... $$|U' - U'_0| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

α étant ainsi fixé, la surface S' est bien déterminée ainsi que la surface S''. Considérons alors la différence $U'' - U''_0$; la fonction U'', étant le potentiel de S'', est holomorphe en tout point qui n'est pas sur S'' et en particulier au voisinage de M_0; on peut donc choisir le point M assez près de M_0 pour que l'on ait :

(3) ..... $$|U'' - U''_0| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Rapprochons alors les inégalités (2) et (3) de l'inégalité (1); on voit que l'on a :

$$|U - U_0| < \varepsilon.$$

La fonction U reste donc continue au voisinage du point M_0, c'est-à-dire quand M tend vers M_0 et le dépasse.

Remarquons que M peut tendre vers M_0 de trois façons :

1° En restant extérieur à S, et du côté positif ;

2° En restant extérieur, et du côté négatif ;

3° En restant sur la surface.

La démonstration précédente s'applique dans ces trois cas.

Revenons maintenant à l'expression de V :

$$V = W + U.$$

Puisque U reste continue au voisinage de M_0, V éprouve en ce point les mêmes discontinuités que W. Ces discontinuités ont été étudiées au paragraphe précédent ; servons-nous des résultats de cette étude, nous obtenons pour V les conclusions suivantes :

1° *Lorsque le point attiré M, d'abord extérieur à la surface, se déplace et la traverse en un point où la densité est μ_0, le potentiel de la double couche croît brusquement de $4\pi\mu_0$ si le point M passe du côté négatif au côté positif de la surface.*

2° *Le potentiel d'une double couche reste continu sur la surface.*

3° *Sa valeur, en un point de la surface, est la moyenne arithmétique des valeurs qu'il prend en deux points infiniment voisins du premier, mais situés de part et d'autre de la surface.*

104. — Le premier de ces résultats, que nous venons d'établir directement, pouvait être obtenu immédiatement comme conséquence de la théorie des surfaces attirantes.

Nous avons démontré plus haut, en effet, la formule suivante (**99**) :

$$V = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}\right),$$

U_1, U_2, U_3 étant trois potentiels de simple couche :

$$U_1 = \int \frac{\alpha' \mu' d\omega'}{r}$$

$$U_2 = \int \frac{\beta' \mu' d\omega'}{r}$$

$$U_3 = \int \frac{\gamma' \mu' d\omega'}{r}.$$

Supposons que le point M, d'abord extérieur à la surface S, tende vers un point M_0 de celle-ci et la franchisse en ce point ; les dérivées premières $\frac{\partial U_1}{\partial x}$, $\frac{\partial U_2}{\partial y}$, $\frac{\partial U_3}{\partial z}$ éprouvent des discontinuités (voir n° **51**).

Ces discontinuités ont pour valeur :

$$\text{pour } \frac{\partial U_1}{\partial x} \ldots\ldots -4\pi\alpha'\mu'.\alpha' = -4\pi\alpha'^2\mu'$$

$$\text{»} \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} \ldots\ldots -4\pi\beta'\mu'.\beta' = -4\pi\beta'^2\mu'$$

$$\text{»} \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} \ldots\ldots -4\pi\gamma'\mu'.\gamma' = -4\pi\gamma'^2\mu'.$$

Le saut brusque de V est donc :

$$4\pi\mu'(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) = 4\pi\mu';$$

c'est la valeur trouvée précédemment.

Remarque I. — Nous avons appelé « densité », dans ce qui précède, la quantité μ' ; en réalité, la densité de la double couche est le quotient de μ' par la quantité très petite ε qui représente l'épaisseur de la double couche. Mais, pour simplifier, nous continuerons à donner le nom de densité à la quantité μ'.

Remarque II. — Nous avons vu, dans la théorie du potentiel des simples couches, qu'un tel potentiel reste continu dans tout l'espace, même quand on franchit la surface. On peut s'étonner de ce que le potentiel d'une double couche éprouve une discontinuité quand on franchit la surface, une double couche n'étant en somme que l'ensemble de deux simples couches très voisines.

Cela s'explique bien facilement. Appelons S_1 et S_2 les deux simples couches très voisines et soit ε leur distance. Quand on franchit la surface S_1, puis la surface S_2, le potentiel reste continu, mais il varie très rapidement entre S_1 et S_2; en effet, les attractions des deux surfaces s'ajoutent dans l'espace qu'elles comprennent et, comme on suppose la densité très grande, la dérivée du potentiel est très grande elle-même dans cet espace. La variation du potentiel est alors d'autant plus rapide que la distance ε est plus petite.

En général, on suppose cette distance infiniment petite et la densité infiniment grande, de manière que le produit μ' de ces deux quantités reste fini; on considère alors les deux surfaces S_1 et S_2 comme confondues avec une même surface S. Dans ce cas limite, qui n'est qu'une fiction analytique et ne correspond plus à rien de physique, on s'explique bien la discontinuité du potentiel ainsi obtenu.

Ajoutons que ce que l'on appelle alors côté positif de la surface c'est le côté défini par les cosinus directeurs α', β', γ' qui entrent dans l'expression de V.

105. Etude des dérivées secondes d'un potentiel de simple couche. Cas d'une surface plane. — Nous avons vu qu'un potentiel de double couche s'exprime par des dérivées premières de potentiels de simple couche. L'étude des dérivées premières d'un potentiel de double couche se ramène donc à l'étude des dérivées secondes d'un potentiel de simple couche.

C'est cette dernière étude que nous allons faire maintenant. Nous commencerons par un cas simple, celui d'une surface plane.

Soit donc S une portion de surface plane attirante limitée par une courbe C.

Prenons ce plan comme plan des xy. Appelons U le potentiel; on a, en conservant les notations habituelles :

$$U = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}.$$

Ce potentiel est une fonction paire en z, c'est-à-dire qui ne change pas quand on change z en $-z$. Par suite, la dérivée première $\frac{\partial U}{\partial z}$ est une fonction impaire et la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ une fonction paire.

Prenons alors deux points symétriques par rapport au plan des xy; les deux valeurs correspondantes de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ sont égales et par conséquent tendent vers la même limite quand les deux points tendent l'un vers l'autre. La dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ reste donc continue quand on franchit la surface.

Au contraire, la dérivée première $\frac{\partial U}{\partial z}$ éprouve une discontinuité et fait un saut brusque égal à $4\pi\mu'$. Quant aux dérivées tangentielles, elles restent continues. Montrons-le par exemple pour $\frac{\partial U}{\partial x}$; on a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx'dy',$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dx'dy'$$

ou, en intégrant par parties,

$$(1)\ldots\quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_{(c)} \frac{\mu' dy'}{r} + \int \frac{\partial \mu'}{\partial x'} \frac{dx'dy'}{r}.$$

La première de ces deux dernières intégrales est une intégrale curviligne étendue au contour C; la seconde est une intégrale de surface étendue à l'aire attirante S.

L'intégrale curviligne est un potentiel de ligne attirante et reste évidemment continue quand on traverse la surface en un point qui n'est pas situé sur le contour C.

L'intégrale de surface est un potentiel de surface qui reste continu dans les mêmes conditions. On peut donc conclure que $\frac{\partial U}{\partial x}$ reste continu quand on traverse la surface, sauf, peut-être, au voisinage du contour limite. La même démonstration s'applique à $\frac{\partial U}{\partial y}$.

Comme on le voit, cette démonstration suppose que la densité μ' est continue et admet des dérivées premières.

Examinons maintenant les dérivées secondes de U.

En vertu de la relation (1), on voit que la dérivée $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ subit un saut brusque égal à $-4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$; de même, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ fait un saut brusque égal à $-4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial y'}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ restent continues; quant à $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, nous avons vu que c'est une fonction paire et que les deux limites vers lesquelles elle tend quand on approche de la surface en dessus et en dessous sont égales. Cela suppose, il est vrai, que ces limites existent. On démontre facilement qu'il en est ainsi : les deux dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ restent continues et ont par conséquent des limites quand on s'approche de la surface; d'autre part, en tout point extérieur à la surface, on a :

$$\Delta U = 0.$$

La différence :

$$\Delta U - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

est donc elle-même continue.

Tout ceci suppose que la densité μ' a des dérivées secondes qui restent finies.

106. Cas d'une surface attirante quelconque. — Soit S une surface attirante quelconque (fig. 78), M_0 un point de la surface, M le point attiré qui tend vers ce point en suivant la droite MM_0.

Prenons le point M_0 comme origine des coordonnées ; nous supposerons que la surface admet en ce point un plan tangent bien

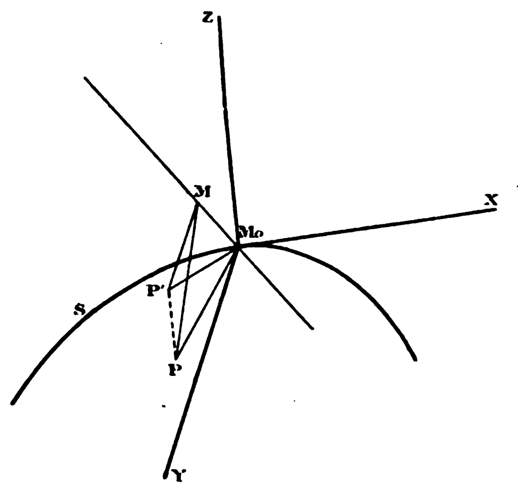


Fig. 78.

déterminé que nous prendrons comme plan des x y, et des rayons de courbure principaux bien déterminés ; enfin nous nous placerons en coordonnées rectangulaires.

Reprenons les notations adoptées au paragraphe **40** ; soit P un point quelconque de la surface et P' sa projection sur le plan des xy. Menons les droites MP, MP', M_0P, M_0P' et posons :

$$MP = r ; \quad MP' = r' ; \quad M_0P = r_0 ; \quad M_0P' = r'_0.$$

Appelons x, y, z les coordonnées du point M et x', y', z' celles du point P ; on a :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2.$$

Si, maintenant, on désigne par $d\omega'$ un élément de S, par $dx'dy'$ sa projection sur le plan des xy et par α', β', γ' les cosinus direc-

teurs de la normale à la surface en un point quelconque P de celle-ci, le potentiel U au point M pourra s'écrire :

$$U = \int \frac{\mu\, d\omega'}{r} = \int \frac{\mu\, dx'\, dy'}{\gamma r}.$$

Posons :

$$U' = \int \frac{\mu\, dx'\, dy'}{\gamma' r}.$$

La fonction U' est le potentiel en M d'une portion de surface plane attirante, la densité étant représentée par la fonction $\frac{\mu'}{\gamma'}$; cette surface plane est la partie du plan des xy qui comprend l'ensemble des projections des éléments $d\omega'$ de S.

Nous avons fait, dans le paragraphe précédent, l'étude de la fonction U' ; nous allons y ramener celle de la fonction U.

Posons pour cela :

$$W = U - U'$$

et étudions la fonction W.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la densité μ' est continue ainsi que ses dérivées premières et qu'elle admet des dérivées secondes qui restent finies. Nous avions déjà fait cette hypothèse pour faire l'étude des dérivées secondes de U'.

Considérons une dérivée d'ordre quelconque de W ; appelons-la DW pour abréger : elle sera de la forme :

$$DW = \int \varphi(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Supposons qu'on ait démontré l'inégalité :

$$(1) \ldots\ldots \qquad |\varphi| < \frac{k}{r_0},$$

k étant un nombre positif quelconque, mais fixe ; je dis alors que DW tend vers une limite quand M tend vers M_0 en suivant la droite MM_0.

Pour le voir, traçons dans le plan des xy un cercle C' de rayon ρ ayant M_0 pour centre : ce cercle est la projection d'une ligne C tracée sur S et entourant M_0. La surface S est ainsi partagée en deux parties S' et S'', S' étant celle qui contient M_0.

Pour tout point de S' on a : $r_0' < \rho$, et pour tout point de S'' : $r_0' > \rho$.

A chacune de ces parties correspond une fonction W ; appelons W' et W'' ces deux fonctions ; on a :

$$W = W' + W''$$

et

$$DW = DW' + DW''.$$

Cela posé, remarquons qu'en vertu de l'inégalité (1), on a :

$$|DW'| < \int \frac{k dx' dy'}{r_0'}.$$

Cette intégrale est étendue au cercle limité par la circonférence C' ; transformons-la en prenant des coordonnées polaires ; posons :

$$x' = r_0' \cos\theta ; \quad y' = r_0' \sin\theta.$$

L'intégrale peut alors s'écrire :

$$\int \frac{k dx' dy'}{r_0'} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} dr_0' d\theta = 2\pi k \rho$$

et l'on a par suite :

(2)..... $$|DW'| < 2\pi k \rho.$$

Observons d'ailleurs que, la fonction φ satisfaisant à l'inégalité (1), l'intégrale

$$DW = \int \varphi \, dx' dy'$$

a un sens au point M_0 ; appelons alors DW_0 sa valeur en ce point et DW_0', DW_0'' celles des fonctions DW', DW'' au même point. On a évidemment :

$$DW - DW_0 = DW' - DW_0' + DW'' - DW_0''$$

d'où :

$$|DW - DW_0| < |DW' - DW_0'| + |DW'' - DW_0''|.$$

Or, je me propose de montrer que l'on a :

$$\lim (DW - DW_0) = 0$$

quand le point M tend vers M_0, c'est-à-dire que l'on peut choisir le point M assez voisin de M_0 pour que l'on ait :

$$|DW - DW_0| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné aussi petit que l'on voudra.

En vertu de l'inégalité (2), à laquelle DW_0 satisfait aussi, on peut choisir ρ assez petit pour que l'on ait à la fois :

$$|DW'| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$|DW'_0| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et par conséquent :

$$|DW' - DW'_0| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

ρ étant ainsi fixé, les domaines S' et S'' sont bien délimités et l'on peut prendre le point M assez voisin de M_0 pour que l'on ait :

$$|DW'' - DW''_0| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cela est possible car, le point M_0 étant extérieur à S'', la fonction W'' est holomorphe au voisinage de ce point.

La position de M étant ainsi choisie, on a :

$$|DW - DW_0| < \varepsilon.$$

Il est ainsi démontré que la fonction DW tend vers la valeur DW_0 qu'elle a au point M_0, quand M tend vers ce point, et cela, quel que soit le chemin suivi. Cette fonction reste donc continue quand on franchit la surface.

Si une fonction φ satisfaisant à une inégalité de la forme :

$$\varphi < \frac{k}{r_0^{\alpha}}$$

est dite d'ordre α, le théorème précédent pourra s'exprimer ainsi : quand on franchit la surface, une dérivée DW reste continue si la fonction sous le signe $\int$ est d'ordre 1.

REMARQUE. — On peut énoncer les deux propositions suivantes qui sont évidentes :

1° Le produit de deux fonctions qui sont respectivement d'ordre m et d'ordre n est d'ordre $m + n$.

2° L'inverse d'une fonction d'ordre 1 n'est pas forcément d'ordre — 1.

107. On peut énoncer dans ce langage tous les théorèmes établis (chap. III) sur les surfaces attirantes. Par exemple les inégalités du § **40** montrent que :

$$z' \ldots\ldots\ldots \text{ est d'ordre } 2$$

$$\frac{1}{r} \text{ et } \frac{1}{r'} \ldots\ldots\ldots \text{ sont d'ordre } 1$$

$$\frac{r}{r'} \ldots\ldots\ldots \text{ est d'ordre } 0$$

$$\frac{x - x'}{r}, \frac{y - y'}{r}, \frac{z - z'}{r} \ldots\ldots\ldots \text{ sont d'ordre } 0.$$

En général le rapport

$$\frac{(x - x')^a (y - y')^b (z - z')^c}{r^m r'^p}$$

où l'on suppose $m + p > a + b + c$, est d'ordre

$$(m + p) - (a + b + c) \ldots$$

etc.

Considérons maintenant la fonction W envisagée précédemment ; elle a pour expression :

$$W = \int \mu' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) d\omega'.$$

Calculons-en les dérivées premières et secondes ; pour cela, calculons d'abord les dérivées de $\frac{1}{r}$ et de $\frac{1}{r'}$. On a :

$$D_x \frac{1}{r} = \frac{x' - x}{r^3}; \quad D_y \frac{1}{r} = \frac{y' - y}{r^3}; \quad D_z \frac{1}{r} = \frac{z' - z}{r^3}$$

$$D_{x^2} \frac{1}{r} = \frac{3(x' - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}; \quad D_{yx} \frac{1}{r} = \frac{3(x' - x)(y' - y)}{r^5}$$

$$D_{y^2}\frac{1}{r}=\frac{3(y-y)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\qquad D_{yz}\frac{1}{r}=\frac{3(y-y)(z-z)}{r^5}$$

$$D_{z^2}\frac{1}{r}=\frac{3(z-z)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\qquad D_{zx}\frac{1}{r}=\frac{3(z-z)(x-x)}{r^5}$$

[illegible]

$$D_x\frac{1}{r}=\frac{x-x}{r^3},\qquad D_y\frac{1}{r}=\frac{y-y}{r^3},\qquad D_z\frac{1}{r}=\frac{-z}{r^3}$$

$$D_{x^2}\frac{1}{r}=\frac{3(x-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\qquad D_{xy}\frac{1}{r}=\frac{3(x-x)(y'-y)}{r^5}$$

$$D_{y^2}\frac{1}{r}=\frac{3(y-y)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\qquad D_{yz}\frac{1}{r}=\frac{-3(y-y)z}{r^5}$$

$$D_{z^2}\frac{1}{r}=\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\qquad D_{zx}\frac{1}{r}=\frac{-3(x-x)z}{r^5}.$$

[illegible] :

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\int \mu\,(x-x)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)d\omega$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\int \mu\,(y-y)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)d\omega$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=\int \mu\left(\frac{z-z}{r^3}-\frac{z}{r'^3}\right)d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\int \mu\left[3(x-x)^2\left(\frac{1}{r^5}-\frac{1}{r'^5}\right)-\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\int \mu\left[3(y-y)^2\left(\frac{1}{r^5}-\frac{1}{r'^5}\right)-\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=\int \mu\left[\frac{3(z-z)^2}{r^5}-\frac{3z^2}{r'^5}-\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}=\int \mu\left[3(x-x)(y-y)\left(\frac{1}{r^5}-\frac{1}{r'^5}\right)\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}=\int \mu\left[3(y-y)\left(\frac{z-z}{r^5}-\frac{z}{r'^5}\right)\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial x}=\int \mu\left[3(x-x)\left(\frac{z-z}{r^5}-\frac{z}{r'^5}\right)\right]d\omega.$$

Je vais démontrer les propositions suivantes :

1° Quand on franchit la surface, les dérivées premières de W restent continues.

2° Au contraire, les dérivées secondes éprouvent des discontinuités, sauf si la densité μ'_0, au point où l'on traverse la surface, est nulle.

108. Occupons-nous d'abord des dérivées premières.

Considérons $\frac{\partial W}{\partial x}$; la fonction sous le signe $\int$ est :

$$\varphi = \mu' (x' - x)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

C'est un produit de deux facteurs; le premier, μ', est d'ordre zéro. Montrons que le second est d'ordre 1. On peut l'écrire :

$$(1) \ldots\ldots \qquad (x' - x)(r' - r)\left[\frac{1}{r^3 r'} + \frac{1}{r^2 r'^2} + \frac{1}{r r'^3}\right].$$

Cette expression est la somme de trois termes. Le premier

$$\frac{(x' - x)(r' - r)}{r^3 r'}$$

est évidemment d'ordre 1 ; en effet : $\frac{x' - x}{r'}$ est d'ordre 0 ; de plus $r' - r$ est d'ordre -2, car on a :

$$|r' - r| < z';$$

enfin $\frac{1}{r^3}$ est d'ordre 3; le produit $\frac{(x' - x)(r' - r)}{r' r^3}$ est donc d'ordre 1.

Il en est de même pour les deux autres termes de l'expression (1) et l'on voit bien que φ est d'ordre 1. La dérivée $\frac{\partial W}{\partial x}$ est donc continue quand on traverse la surface et cela est vrai quelle que soit la valeur de la densité au point où l'on franchit cette surface.

La même démonstration s'étend à $\frac{\partial W}{\partial y}$ et $\frac{\partial W}{\partial z}$, et la proposition annoncée pour les dérivées premières est entièrement prouvée.

[illegible] [illegible] maintenant au cas des dérivées secondes. Nous [illegible] simplement [illegible] : Si la densité [illegible], au point M, ou [illegible] est nulle, les dérivées secondes restent [illegible].

[illegible] l'une d'elles, [illegible], par exemple ; la fonction [illegible] est

$$[illegible]\left(\frac{1}{r^{\prime}}-\frac{1}{r}\right)\Big].$$

[illegible] au point M [illegible] nulle et possédant des dérivées [illegible], la fonction [illegible] est d'ordre — 1 au [illegible] point. Montrons que la quantité entre crochets [illegible] :

[illegible]

[illegible]

La quantité entre crochets considérée peut donc s'écrire :

[illegible]

[illegible]

$$\sum\frac{[illegible]}{r^{m}r^{\prime n}} \quad \sum\frac{r-r}{r^{p}r^{\prime q}}$$

[illegible]

$$m-n=6$$

$$p-q=4.$$

Chacune des sommes de l'expression (3) est d'ordre 2; en effet, un terme quelconque de la première est de la forme :

$$(4)\ldots\ldots \qquad \frac{3(x'-x)^2(r'-r)}{r^m r'^n}.$$

Ce terme est d'ordre 2 car 1° $\frac{(x'-x)^2}{r^m r'^n}$ est d'ordre $m+n-2=4$; 2° $(r'-r)$ est d'ordre -2 puisque l'on a :

$$|r-r'|<z'$$

et que z' est d'ordre -2; l'expression (4) est donc d'ordre $4-2=2$.

Bref, la première somme de l'expression (3) est d'ordre 2; la seconde est d'ailleurs aussi d'ordre 2 car tout terme de la forme $\frac{r'-r}{r^p r'^q}$ est d'ordre $p+q-2$, c'est-à-dire dans le cas présent $4-2=2$.

Ainsi l'expression (3) est d'ordre 2, la fonction φ est donc d'ordre $-1+2=1$ et par conséquent la dérivée $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ est continue.

Le même raisonnement s'applique aux autres dérivées secondes de W et la propriété annoncée est donc démontrée : *les dérivées secondes de W restent continues quand on franchit la surface en un point M_0 où la densité est nulle.*

110. Revenons alors aux potentiels U et U′ considérés au paragraphe **106** et *supposons nulle la densité au point M_0 où l'on franchit la surface.* Nous avions posé :

$$U=W+U'.$$

La fonction W considérée dans cette relation est précisément celle que nous venons d'étudier et, par suite, les dérivées secondes de U, quand on franchit la surface au point M_0 éprouvent les mêmes discontinuités que celles de U′ puisque celles de W restent continues.

Or U′ est le potentiel d'une surface plane attirante sur laquelle

la densité en chaque point x', y' est représentée par la fonction $\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)$.

Nous avons étudié au paragraphe **105** comment se comporte un pareil potentiel au voisinage de la surface. Reportons-nous aux résultats de cette étude : nous voyons que lorsque le point M franchit la surface au point M_t, les dérivées secondes : $\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U'}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial y}$ restent continues ; les autres éprouvent des discontinuités. Le saut brusque de $\frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial z}$ est égal à

$$-4\pi\,\frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'} \text{ et celui de } \frac{\partial^2 U'}{\partial y \partial z} \text{ à } -4\pi\,\frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'}.$$

Puisque les dérivées secondes de U éprouvent les mêmes discontinuités que les dérivées secondes de U', on peut donc énoncer les conclusions suivantes :

Quand un point attiré M franchit une surface attirante en un point M_t où la densité est nulle, quatre dérivées secondes, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ *et* $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, *du potentiel U de cette surface restent continues ; les deux autres dérivées secondes* $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ *éprouvent des discontinuités ; le saut brusque de la première est*

$$-4\pi\,\frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'} \quad \textit{et celui de la seconde} \quad -4\pi\,\frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'}$$

Remarquons que γ' est égal à 1 et maximum pour $x' = 0$ et $y' = 0$. On a donc au point M_t :

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial x'} = 0$$

et

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial y'} = 0.$$

Par conséquent, les sauts brusques considérés se réduisent à :

$$-4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$$

et

$$-4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial y'}.$$

111. Pour traiter la question d'une façon complète, il nous reste à examiner le cas où la densité au point M_0 est différente de zéro.

Nous conserverons les notations précédentes et nous supposerons toujours la surface attirante réduite à une petite calotte S' limitée par une courbe C qui se projettera sur le plan des xy suivant une courbe C'; cela est légitime, parce que le potentiel de la partie restante de la surface est holomorphe au voisinage de M_0 et n'influe pas sur les discontinuités du potentiel total; nous supposerons en outre cette calotte d'étendue assez restreinte pour qu'une parallèle quelconque à l'axe des Z ne la rencontre qu'en un seul point.

Nous avons supposé dans les paragraphes précédents que la surface S' admet en M_0 un plan tangent bien déterminé que nous avons pris pour plan des xy. Nous avons supposé, en outre, qu'au point M_0 la surface possède deux rayons de courbure principaux bien déterminés, entendant par là que les expressions $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ de leurs inverses sont bien déterminées pour ne pas exclure le cas où l'un de ces rayons ou même tous les deux seraient infinis.

Soit alors

$$z' = f(x', y')$$

l'équation de la surface; désignons les dérivées premières et secondes de z' par les notations suivantes :

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = p_1 ; \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = q_1 ;$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} = r_1 ; \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'} = s_1 ; \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2} = t_1 .$$

Cela posé, considérons le potentiel U de la surface; il a pour expression, en un point M_0 extérieur :

$$U = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}.$$

On peut l'écrire :

$$U = \int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{1}{r} dx'dy'.$$

Ce sont les dérivées secondes de U que je me propose d'étudier.

Étudions d'abord $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$; pour cela, calculons $\frac{\partial U}{\partial x}$; on a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx'dy'.$$

Or on a :

$$(1)\ldots\ldots \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Considérons r comme une fonction de x, y, z, x', y', c'est-à-dire supposons, dans l'expression de r, z' remplacé par sa valeur en fonction de x' et y'; on a, dès lors, la relation :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{x' - x}{r^3} - \frac{z' - z}{r^3} p_1,$$

ou bien :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} p_1,$$

d'où :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} p_1 ;$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ prend alors la forme :

$$(2)\ldots\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dx'dy' - \int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} p_1 dx'dy',$$

ou bien :

(3)......
$$\frac{\partial U}{\partial x} = J_1 + J_2,$$

en posant :

$$J_1 = -\int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dx'dy'$$

et

$$J_2 = -\int \frac{\mu'}{\gamma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} p_1 dx'dy'.$$

Considérons J_1 ; cette intégrale peut s'écrire en intégrant par parties :

(4)..... $$J_1 = -\int \frac{\frac{\mu'}{\gamma'}}{r} dy' + \int \frac{\frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}}{r} dx'dy'.$$

Or, appelons $d\omega'$ un élément de surface de la calotte S' et ds' un élément de longueur du contour C qui la limite ; on a :

$$dx'dy' = \gamma' d\omega'$$

et

$$dy' = \beta'_1 ds',$$

β'_1 étant une certaine fonction de x' et y' définie le long de C. La formule (4) devient alors :

(5)..... $$J_1 = -\int \frac{\frac{\mu'\beta'_1}{\gamma'}}{r} ds' + \int \frac{\gamma' \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}}{r} d\omega'.$$

L'intégrale J_1 est ainsi mise sous la forme d'une somme de deux potentiels.

Le premier $-\int \frac{\frac{\mu'\beta'_1}{\gamma'}}{r} ds'$ est un potentiel de ligne attirante, celui qu'engendrerait une distribution de matière attirante faite

sur le contour C, la densité linéaire étant représentée par la fonction $-\frac{\mu'\beta'}{\gamma'}$; ce potentiel est une fonction holomorphe au voisinage de M_0 puisque ce point n'est pas sur le contour C.

Le second potentiel $\displaystyle\int \frac{\gamma' \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}}{r} d\omega'$ est un potentiel de surface, celui qu'engendreraient des masses attirantes distribuées sur S', la densité superficielle étant représentée par la fonction $\gamma' \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$. Ce potentiel reste continu ainsi que ses dérivées tangentielles quand on franchit la surface.

La somme J_1 des deux potentiels précédents reste donc continue ainsi que ses dérivées tangentielles. Il en résulte, si l'on se reporte à la formule (3), que $\frac{\partial U}{\partial x}$ et ses dérivées tangentielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ éprouvent respectivement les mêmes discontinuités, quand on franchit la surface au point M_0, que l'intégrale J_2.

Étudions donc J_2. Cette intégrale peut s'écrire :

$$J_2 = -\int p_1 \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\omega'.$$

Posons :

$$V = -\int \frac{p_1 \mu'}{r} d\omega'.$$

On a évidemment :

$$J_2 = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}.$$

La fonction V est un potentiel de surface attirante, celui qu'engendreraient des masses distribuées sur S', la densité étant repré-

sentée par la fonction $p_1\mu'$. Or, *cette densité s'annule au point* M_0, car le plan tangent en M_0 étant le plan des xy, on a en ce point :

$$p_1 = q_1 = 0;$$

nous sommes donc ramenés au cas étudié dans le paragraphe précédent. Nous savons comment se comportent les dérivées premières et secondes de V quand on franchit la surface en M_0 : $\frac{\partial V}{\partial z}$ reste continue ; $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ fait un saut brusque égal à $4\pi \frac{\partial\left(\frac{p_1\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ un saut brusque égal à $4\pi \frac{\partial\left(\frac{p_1\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'}$.

On peut donner à ces discontinuités une expression très simple en remarquant que p_1 et q_1 sont nuls en M_0 et qu'en ce point γ' est égal à 1 ; on a :

$$4\pi \frac{\partial\left(\frac{p_1\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'} = 4\pi\mu' \frac{\partial p_1}{\partial x'} = 4\pi'\mu' r_1,$$

et

$$4\pi \frac{\partial\left(\frac{p_1\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'} = 4\pi\mu' \frac{\partial p_1}{\partial y'} = 4\pi\mu' s_1.$$

Ainsi donc, quand on traverse la surface en M_0 :

1° $\frac{\partial V}{\partial z}$ reste continu ; donc J_2 et, par suite, $\frac{\partial U}{\partial x}$ restent continues. Ce résultat était déjà connu (voir § 50).

2° $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ et, par suite, $\frac{\partial J_2}{\partial x}$ font un saut brusque égal à $4\pi\mu' r_1$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ fait donc aussi un saut égal à $4\pi\mu' r_1$.

3° $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ et, par suite, $\frac{\partial J_2}{\partial y}$ et enfin $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ font un saut brusque égal à $4\pi\mu' s_1$.

Les mêmes calculs appliqués à $\frac{\partial U}{\partial y}$ nous auraient montré que $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ fait un saut brusque égal à $4\pi\mu' t_1$.

La connaissance des sauts brusques de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ nous permet de calculer immédiatement le saut brusque de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. En effet, la somme ΔU de ces trois dérivées est continue puisqu'elle est constamment nulle ; le saut brusque de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ est donc $-4\pi\mu' (r_1 + t_1)$, c'est-à-dire la somme changée de signe des sauts brusques de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$.

Il nous reste à calculer les discontinuités de $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ et de $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$.

Calculons la première, celle de $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$; pour cela, revenons à l'expression (3) de $\frac{\partial U}{\partial x}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = J_1 + J_2.$$

On a :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{\partial J_2}{\partial z}.$$

$\frac{\partial J_2}{\partial z}$ n'est autre que $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ qui reste continue puisque la densité relative à V s'annule en M_0. Quant à J_1, nous avons vu que c'est une somme de deux potentiels : l'un de ligne, l'autre de surface. Le premier est holomorphe en M_0 ; il ne fournit donc aucune discontinuité. Le second, au contraire, a une dérivée normale discontinue ; cette dérivée fait un saut brusque égal à

$$-4\pi \frac{\partial \left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$$

puisque la densité est, d'après la formule (5), représentée par la fonction :

$$\gamma' \frac{\partial \left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$$

et qu'au point M_0, γ' est égal à 1.

D'après cela, $\frac{\partial J_1}{\partial z}$ fait le même saut brusque et, par suite, il en est de même de $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$.

Le même calcul appliqué à $\frac{\partial U}{\partial y}$ montrerait que $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ fait un saut brusque égal à $-4\pi \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'}$.

112. Résumons tous ces résultats dans le tableau suivant :

Dérivées secondes.	Sauts brusques.
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$	$4\pi\mu' r_1$
$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$	$4\pi\mu' t'_1$
$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$-4\pi\mu'(r_1 + t_1)$
$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$	$4\pi\mu' s_1$
$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$	$-4\pi \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial y'}$
$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}$	$-4\pi \frac{\partial\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$.

Remarque I. — On peut donner au saut brusque de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ une expression géométrique très simple, indépendante du choix des axes ; $(r_1 + t_1)$ désigne, en effet, la somme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ des inverses des rayons de courbure principaux en M_0 ; le saut brusque de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ est donc

$$-4\pi\mu'\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Remarque II. — Les expressions des discontinuités des déri-

vées secondes se simplifient si l'on prend pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure qui se croisent en M_0.

Dans ce cas, en effet, on a :

$$r_1 = \frac{1}{R_1}; \quad t_1 = \frac{1}{R_2}; \quad s_1 = 0;$$

et, de plus :

$$\frac{\partial \gamma'_1}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \gamma'_1}{\partial y'} = 0,$$

comme le montrent les formules d'Olinde Rodrigue.

On voit alors que les sauts brusques pour les six dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}$$

deviennent respectivement égaux à :

$$4\pi\mu'_1 \frac{1}{R_1}, \quad 4\pi\mu'_1 \frac{1}{R_2}, \quad -4\pi\mu'_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \; 0,$$

$$-4\pi \frac{\partial \mu'_1}{\partial y'}, \quad -4\pi \frac{\partial \mu'_1}{\partial x'}.$$

113. Étude des dérivées premières d'un potentiel de double couche. — Soit S une double couche quelconque ; on sait que son potentiel V est holomorphe dans tout domaine qui ne contient aucun point de S. Mais si le point attiré M vient à franchir la surface en un point M_0, la fonction V et ses dérivées éprouvent des discontinuités. Nous connaissons déjà celles de V, calculons celle des dérivées premières.

Nous supposons qu'en M_0 la surface S admet un plan tangent bien déterminé et nous prenons ce plan comme plan des xy, le point M_0 étant pris pour origine.

Les résultats du paragraphe précédent vont nous montrer immédiatement comment se comportent les dérivées premières de V au voisinage de M_0.

On a, en effet, en reprenant les notations habituelles :

$$V = -\int \mu' \left[\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\omega',$$

ce que nous avons mis (99) sous la forme :

$$V = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}\right),$$

en posant :

$$U_1 = \int \frac{\alpha'\mu' d\omega'}{r}$$

$$U_2 = \int \frac{\beta'\mu' d\omega'}{r}$$

$$U_3 = \int \frac{\gamma'\mu' d\omega'}{r}.$$

U_1, U_2, U_3 sont des potentiels de simples couches ; V s'exprime avec des dérivées premières de ces potentiels et par conséquent les dérivées premières de V s'expriment avec des dérivées secondes de ces mêmes potentiels.

Considérons, par exemple, $\frac{\partial V}{\partial x}$; on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z}\right).$$

Or, quand on franchit S au point M_0, les trois dérivées secondes : $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z}$ font des sauts brusques respectivement égaux à : $4\pi\alpha'\mu' r_1$, $4\pi\beta'\mu' s_1$, $-4\pi\frac{\partial \mu'}{\partial x'}$, c'est-à-dire égaux à : 0, 0, $-4\pi . \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$ puisque α' et β' sont nuls au point M_0.

Il en résulte que $\frac{\partial V}{\partial x}$ fait un saut brusque égal à $4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$.

On démontrerait de même que $\frac{\partial V}{\partial y}$ fait un saut brusque égal à $4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial y'}$.

Voyons maintenant ce qui se passe pour $\frac{\partial V}{\partial z}$; on a :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}\right).$$

Le saut brusque de $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z}$ est égal à $-4\pi \frac{\partial\left(\frac{\alpha'\mu'}{\gamma'}\right)}{\partial x'}$, c'est-à-dire à $-4\pi\mu' \frac{\partial \alpha'}{\partial x'}$, car $\alpha' = 0$ et $\gamma' = 1$ au point M_0.

Le saut brusque de $\frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z}$ est de même égal à $-4\pi\mu' \frac{\partial\beta'}{\partial y'}$ et enfin celui de $\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}$ à $-4\pi\mu'(r_1+t_1)$.

Le saut brusque de $\frac{\partial V}{\partial z}$ est donc égal à :

$$-4\pi\mu'\left[r_1 + t_1 + \frac{\partial\alpha'}{\partial x'} + \frac{\partial\beta'}{\partial y'}\right].$$

Or on a en général :

$$\alpha' = \frac{-p_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}; \quad \beta' = \frac{-q_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}};$$

d'où :

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial x'} + \frac{\partial\beta'}{\partial y'} = \frac{-1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}(r_1+t_1) + p_1\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}\right)$$
$$+ q_1\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}\right).$$

Au point M_0, p_1 et q_1 étant nuls, cette formule se réduit à :

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial x'} + \frac{\partial\beta'}{\partial y'} = -(r_1+t_1).$$

Le saut brusque de $\frac{\partial V}{\partial z}$ se réduit donc à zéro ; $\frac{\partial V}{\partial z}$ reste continue.

En résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

Quand on franchit une double couche, la dérivée prise suivant la normale reste continue. Les dérivées tangentielles $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ *font des sauts brusques respectivement égaux à* $4\pi\frac{\partial\mu'}{\partial x'}$ *et* $4\pi\frac{\partial\mu'}{\partial y'}$.

114. — On peut obtenir ces résultats d'une autre manière sans les déduire de l'étude des dérivées secondes d'un potentiel de simple couche dans le cas général.

Voici une méthode qui suppose seulement que l'on sache comment se comportent ces dérivées secondes dans le cas où la densité est nulle au point où l'on traverse la surface.

Nous procéderons de la manière suivante :

1° Dans un premier cas nous supposerons que la surface qui porte la double couche est fermée et que la densité est constante.

2° Nous traiterons ensuite le cas d'une surface fermée en supposant la densité variable d'un point à l'autre, mais nulle au point M_0.

3° Nous traiterons après cela le cas d'une surface fermée quelconque sans faire d'hypothèse sur la densité en M_0.

4° Nous traiterons enfin le cas d'une surface quelconque non fermée.

PREMIER CAS.— *Surface fermée et densité constante.* — On a vu (101) que dans ce cas le potentiel est constant à l'intérieur et constant à l'extérieur ; les dérivées sont alors nulles partout et n'éprouvent donc pas de discontinuité quand on franchit la surface.

DEUXIÈME CAS.— *Surface fermée et densité variable mais nulle au point* M_0.

Le potentiel V s'exprime en fonction des potentiels de simples couches : U_1, U_2 U_3, par la formule

$$V = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}\right).$$

Or les densités correspondantes $\alpha'\mu'$, $\beta'\mu'$, $\gamma'\mu'$ s'annulent en M_0 puisqu'en ce point μ' est nulle. Nous savons alors comment se comportent les dérivées secondes des fonctions U_1, U_2, U_3 (voir n° 110) et nous pouvons en déduire les sauts brusques des dérivées premières de V.

Considérons par exemple $\frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z \partial x}\right).$$

$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$ reste continue ainsi que $\frac{\partial^2 U_1}{\partial y \, \partial x}$; quant à $\frac{\partial^2 U_3}{\partial z \partial x}$ elle fait un saut brusque égal à $-4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$. Le saut brusque de $\frac{\partial V}{\partial x}$ est donc

égal à $4\pi\frac{\partial\mu'}{\partial x}$. On voit de même que $\frac{\partial V}{\partial y}$ fait un saut brusque égal à $4\pi\frac{\partial\mu'}{\partial y}$.

Considérons maintenant $\frac{\partial V}{\partial z}$; on a :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}\right).$$

$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z}$ fait un saut brusque égal à $-4\pi\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\alpha'\mu'}{\gamma'}\right)$; on voit facilement qu'il est nul ; en effet on a :

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\alpha'\mu'}{\gamma'}\right) = \alpha'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\mu'}{\gamma'}\right) + \frac{\mu'}{\gamma'}\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}$$

et les quantités α' et μ' sont nulles en M_0. De même, le saut brusque de $\frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z}$ est égal à zéro. Enfin $\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}$ reste continue. $\frac{\partial V}{\partial z}$ est donc continue.

Troisième cas. — *Surface fermée et densité quelconque.* — Appelons toujours V le potentiel ; on a, en employant les notations définies au début de ce chapitre :

$$V = \int \mu' d\tau'.$$

Appelons μ_0 la densité au point M_0. On peut écrire :

$$V = \int (\mu' - \mu_0) d\tau' + \int \mu_0 d\tau'.$$

La deuxième intégrale est un potentiel de double couche dont la densité est constante. Ses dérivées premières sont continues (1er cas).

La première intégrale est un potentiel de double couche dont la densité variable est nulle au point M_0 (2e cas). Les dérivées premières de V se comportant comme celles de ce potentiel, on a donc encore :

Pour $\frac{\partial V}{\partial x}$........ le saut brusque $4\pi\frac{\partial\mu'}{\partial x'}$

$$\text{Pour } \frac{\partial V}{\partial y} \ldots\ldots\ldots \text{ le saut brusque } 4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial y'}$$

$$\text{Pour } \frac{\partial V}{\partial z} \ldots\ldots\ldots \qquad — \qquad 0.$$

QUATRIÈME CAS. — *Surface non fermée quelconque.* — Soit S' une pareille surface limitée par un contour C.

La surface ayant deux côtés, on peut faire passer par C une deuxième surface S'' de manière que l'ensemble S' S'' forme une surface fermée S. Quelle que soit la distribution de matière qu'on envisage sur S'', son potentiel V'' est une fonction holomorphe au voisinage de M_0 qui n'est pas situé sur S'' mais sur S'. Si donc on franchit S' en M_0, les discontinuités des dérivées de S' sont les mêmes que celles des dérivées correspondantes de S. Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent d'une surface fermée quelconque.

On voit donc que dans tous les cas : $\frac{\partial V}{\partial z}$ reste continue et que les dérivées tangentielles éprouvent des discontinuités égales à $4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial x'}$ pour $\frac{\partial V}{\partial x}$ et à $4\pi \frac{\partial \mu'}{\partial y'}$ pour $\frac{\partial V}{\partial y}$.

Le théorème énoncé à la fin du paragraphe **113** est donc démontré.

115. Comparaison des simples et des doubles couches. — Considérons deux potentiels l'un V de simple couche, l'autre V' de double couche, relatifs à une même surface S :

$$V = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}$$

$$V' = -\int \mu' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Comparons-les :

1° Ces deux potentiels sont des fonctions harmoniques dans tout domaine qui ne contient aucun point de la surface S.

2° Désignons par 1 et 2 les deux côtés de la surface et soit M_0 un point de cette surface.

Lorsque le point attiré M tend vers M_0 en suivant une certaine

droite L passant par M_0 et en restant du côté 1 de la surface, les fonctions :

$$V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

et les fonctions

$$V', \frac{\partial V'}{\partial x}, \frac{\partial V'}{\partial y}, \frac{\partial V'}{\partial z}$$

tendent vers des limites ; nous représenterons ces limites par les notations :

$$V_1, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

et

$$V'_1, \frac{\partial V'_1}{\partial x}, \frac{\partial V'_1}{\partial y}, \frac{\partial V'_1}{\partial z}.$$

Ces limites sont indépendantes de la droite L que suit le point M.

De même, si M tend vers M_0 du côté 2 de la surface, les huit fonctions considérées tendent uniformément vers certaines limites que nous désignerons par :

$$V_2, \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial y}, \frac{\partial V_2}{\partial z}$$
$$V'_2, \frac{\partial V'_2}{\partial x}, \frac{\partial V'_2}{\partial y}, \frac{\partial V'_2}{\partial z}.$$

Dans les deux cas, ces limites, étant atteintes uniformément, varient continuement quand M_0 se déplace sur la surface.

A ce point de vue, les deux potentiels se comportent de la même façon ; mais des différences s'introduisent quand on compare les limites relatives au côté 1 avec les limites relatives au côté 2.

Considérons la normale en M_0 à S et prenons comme sens positif sur cette normale celui qui va du côté 1 au côté 2 ; appelons $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dV'}{dn}$ les dérivées de V et V' prises au point M parallèlement à cette direction. Quand M tend vers M_0 du côté 1, $\frac{dV}{dn}$ tend vers une limite que nous appellerons $\frac{dV}{dn_1}$ et quand

M tend vers M_0 du côté 2, $\frac{dV}{dn}$ tend vers une limite $\frac{dV}{dn_2}$. On a de même pour $\frac{dV'}{dn}$ des limites $\frac{dV'}{dn_1}$ et $\frac{dV'}{dn_2}$.

Cela posé, dans le cas de la simple couche, on a les circonstances suivantes :

1° V reste continu. . . . . . $V_1 = V_2$

2° $\frac{dV}{dn}$ est discontinu . . . . $\frac{dV}{dn_2} - \frac{dV}{dn_1} = -4\pi\mu$

(μ désigne ici la densité au point M_0).

3° Les dérivées tangentielles sont continues.

Le cas de la double couche présente les circonstances inverses :

1° V′ est discontinu . . . . . $V'_2 - V'_1 = 4\pi\mu$

2° $\frac{dV'}{dn}$ est continu. . . . . . $\frac{dV'}{dn_2} = \frac{dV'}{dn_1}$.

4° Les dérivées tangentielles sont discontinues.

Dans la formule $V'_2 - V'_1 = 4\pi\mu$, nous supposons que le côté positif de la surface coïncide avec le côté 2, c'est-à-dire que, dans l'expression de V′, les cosinus directeurs α', β', γ' sont ceux de la direction positive de la normale à S telle que nous l'avons définie (celle qui va du côté 1 au côté 2).

CHAPITRE VII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET
LA MÉTHODE DU BALAYAGE

116. Enoncé du problème de Dirichlet. — Soit un domaine T limité par une surface fermée S. Le volume considéré est supposé *connexe*, mais son ordre de connexion peut être quelconque. Enfin appelons Φ une fonction continue définie en tout point de S : cette fonction, d'ailleurs arbitraire, est regardée comme donnée.

Cela posé, nous nous proposons de construire une fonction V jouissant des propriétés suivantes :

1° V est harmonique dans tout domaine T' contenu à l'intérieur de T.

2° La valeur V_M de V en un point quelconque M (x, y, z) de T tend vers la valeur Φ_{M_0} de Φ en un point M_0 (x_0, y_0, z_0) de S, quand le point M tend vers le point M_0 en suivant un chemin quelconque assujetti seulement à ne pas sortir du domaine T.

C'est en cela que consiste le *problème de Dirichlet.*

Nous venons d'énoncer le problème de Dirichlet *intérieur*. On peut aussi se poser un problème semblable pour le cas où le domaine T est formé de la portion de l'espace située à l'extérieur de S. C'est ce que l'on appelle le problème de Dirichlet *extérieur*. Lorsque l'on étudie ce nouveau problème, on impose à la fonction cherchée V une nouvelle condition : celle d'être régulière à l'infini, c'est-à-dire de s'y comporter comme un potentiel newtonien.

Nous avons déjà vu (§ 64) que le problème de Dirichlet ne peut pas admettre plus d'une solution. Nous allons montrer qu'

en possède toujours effectivement une. Cette proposition porte le nom de *Principe de Dirichlet.*

Il est clair que toutes les considérations précédentes pourraient être répétées sans modification pour le cas du plan. Seulement, on n'a plus besoin alors, en ce qui concerne le problème extérieur, de dire d'avance comment la fonction cherchée doit se comporter à l'infini.

La méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques indiquée par Thomson et exposée au chapitre V permet de ramener le problème extérieur au problème intérieur. Nous ne nous occuperons donc ici que du problème intérieur.

Commençons par établir quelques propositions qui nous seront utiles.

117. Comparaison des fonctions harmoniques et des potentiels. — Envisageons (fig. 79) une surface fermée S délimitant un domaine intérieur T_1 et un domaine extérieur T_2. Nous supposerons que la surface S possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.

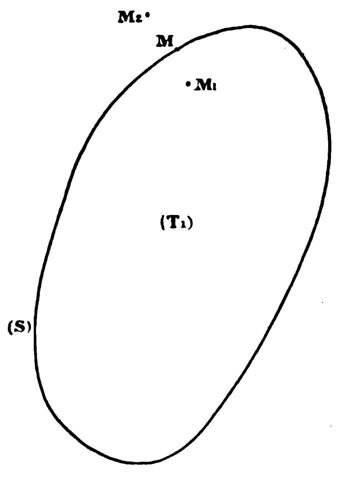


Fig. 79.

Soit maintenant une fonction V présentant les caractères suivants :

1° La fonction V est harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S, c'est-à-dire dans tout domaine contenu dans T_1 comme dans tout domaine contenu dans T_2.

2° La fonction V est régulière à l'infini et s'y comporte comme un potentiel newtonien.

3° Soit M_1 un point situé à l'intérieur de T_1. Considérons un point M de S. Si M_1 tend vers M en suivant un chemin quelconque assujetti seulement à rester à l'intérieur de T_1, les expressions :

tendent vers les limites déterminées :

$$V_1 \text{ et } \frac{dV_1}{dn}$$

qui sont des fonctions continues sur la surface S.

4° Soit M_2 un point situé à l'intérieur de T_2. Considérons toujours le point M de S. Si M_2 tend vers M en suivant un chemin quelconque assujetti seulement à rester à l'intérieur de T_2, les expressions :

$$V \text{ et } \frac{dV}{dn}$$

tendent vers des limites déterminées :

$$V_2 \text{ et } \frac{dV_2}{dn}$$

qui sont des fonctions continues sur la surface S.

5° Posons :

$$-\frac{1}{4\pi}(V_1 - V_2) = \mu''$$
$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn}\right) = \mu'.$$

Nous ne supposons rien sur les fonctions μ' et μ'', sinon qu'elles sont finies et continues sur S.

Je dis que V est alors la somme de deux potentiels newtoniens dus l'un à une simple couche, l'autre à une double couche, portées toutes deux par S.

118. Commençons par examiner le cas où l'on a :

$$\mu' = 0, \quad \mu'' = 0.$$

Je dis que l'on peut affirmer alors que V est identiquement nulle.

En effet, traçons deux surfaces fermées S_1' et S_2', très voisines de S, l'une intérieure, l'autre extérieure (fig. 80). Soit, de plus, Σ une grande sphère de rayon R entourant S. Appelons T_1' l'espace compris à l'intérieur de S_1' et T_2' l'espace compris entre S_2' et Σ.

On a, en vertu de la formule de Green :

$$\int_{(S'_1)} V \frac{dV}{dn} d\omega' = \int_{(T'_1)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

et :

$$\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn} d\omega' - \int_{(S'_2)} V \frac{dV}{dn} d\omega = \int_{(T'_2)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

Fig. 80.

les dérivées $\frac{d}{dn}$ étant prises toujours suivant la direction de la normale extérieure à la surface sur laquelle on intègre.

L'intégrale :

$$\int_{(S'_1)} V \frac{dV}{dn} d\omega'$$

tend vers une limite déterminée :

$$\int_{(S)} V_1 \frac{dV_1}{dn} d\omega'$$

quand S_1' tend vers S en passant par une série quelconque de formes. Cela prouve que l'intégrale :

$$\int_{(T_1)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

a un sens. Il fallait le montrer, car on ne sait rien a priori de ce que deviennent les dérivées :

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

sur S. Tout ce que l'on avait supposé, en effet, ne concernait que la dérivée :

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z},$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à S.

Finalement, on a :

$$\int_{(S)} V_1 \frac{dV_1}{dn} d\omega' = \int_{(T_1)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Voilà un premier point.

Prenons maintenant l'intégrale :

$$\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn} d\omega'$$

et supposons que le rayon R de la sphère Σ augmente indéfiniment. Puisque V se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien, on peut écrire, dès que R est assez grand :

$$\left| V \right| < \frac{M}{R}, \quad \left| \frac{dV}{dn} \right| < \frac{N}{R^2}.$$

Soit, d'autre part, une sphère Ω de rayon 1 concentrique à Σ.

Appelons $d\sigma$ un élément infinitésimal de Ω. On aura :

$$\left|\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn} d\omega'\right| < \frac{MN}{R^3}\int_{(\Omega)} 4\pi R^2 d\sigma.$$

$$\left|\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn} d\omega'\right| < \frac{4\pi MN}{R}.$$

On voit que l'intégrale étudiée tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Cela posé, l'intégrale :

$$\int_{(S_2')} V \frac{dV}{dn} d\omega'$$

tend vers une limite déterminée :

$$\int_{(S)} V_2 \frac{dV_2}{dn} d\omega'$$

quand S_2' tend vers S en passant par une série quelconque de formes.

On conclut de tout cela que l'intégrale :

$$\int_{(T_2)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

a un sens. On a :

$$\int_{(T_2)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int_{(S)} \frac{dV_2}{dn} d\omega'$$

en vertu des remarques précédentes.

On déduit de là la relation :

$$\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau = \int_{(S)} \left(V_1 \frac{dV_1}{dn} - V_2 \frac{dV_2}{dn}\right) d\omega',$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace. Mais :

$$V_1 \frac{dV_1}{dn} - V_2 \frac{dV_2}{dn} = 0,$$

à cause des hypothèses faites.

D'où :

$$\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau = 0.$$

Cela prouve que l'on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0$$

en tout point de l'espace. Donc :

$$V = C^{te}.$$

Or V s'annule à l'infini. Par conséquent :

$$V = 0$$

C. Q. F. D.

119. Abordons maintenant l'étude du cas général. Posons :

$$V' = \int_{(S)} \frac{\mu' d\omega'}{r} + \int_{(S)} \mu'' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega',$$

en désignant par $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise par rapport à x, y, z suivant la direction de la normale à S en chaque élément $d\omega'$. On voit que V' est la somme d'un potentiel de surface et d'un potentiel de double couche.

En vertu des hypothèses faites tant sur S que sur μ' et μ'', on peut affirmer l'existence des quantités :

$$V'_1, V'_2, \frac{dV'_1}{dn}, \frac{dV'_2}{dn}.$$

De plus, on a :

$$V'_1 - V'_2 = -4\pi\mu'' = V_1 - V_2$$

et :

$$\frac{dV'_1}{dn} - \frac{dV'_2}{dn} = 4\pi\mu' = \frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn},$$

conformément aux théorèmes établis pour les simples et doubles couches dans les chapitres III et IV.

Posons alors :

$$U = V - V'.$$

La fonction V est harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S ; elle est régulière à l'infini ; enfin on a :

$$U_1 - U_2 = 0, \frac{dU_1}{dn} - \frac{dU_2}{dn} = 0.$$

D'où :

$$U = 0$$
$$V = V'.$$

Ainsi, *la fonction V peut être regardée comme la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche.*

120. On peut écrire :

$$4\pi V = \int_{(S)} \left(\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn}\right)\frac{d\omega'}{r} - \int_{(S)} (V_1 - V_2) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Supposons :

$$V_2 = 0, \frac{dV_2}{dn} = 0,$$

Alors :

$$4\pi V = \int_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{dV_1}{dn} - V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\omega'.$$

On retombe sur une formule connue.

Supposons maintenant :

$$V_1 - V_2 = 0.$$

Alors :

$$4\pi V = \int_{(S)} \left(\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn}\right)\frac{d\omega'}{r}$$

et V est un potentiel de simple couche. Ce cas se présente notamment si on définit V au moyen de deux fonctions harmoniques, l'une à l'intérieur de S, l'autre à l'extérieur de S, prenant les mêmes valeurs sur S.

121. **Balayage d'un domaine**. — Considérons un domaine T ayant pour frontière une surface fermée S. Soit P un point situé

à l'intérieur de T, portant l'unité de masse. Désignons par ρ la distance de P à un point M quelconque de l'espace. Le potentiel newtonien dû à l'action de P sur M a pour valeur :

$$V = \frac{1}{\rho}.$$

Supposons maintenant qu'on sache construire la fonction de Green G relative au domaine T et au point P. On a :

$$G = \frac{1}{\rho} - H,$$

H étant déterminée par les relations suivantes :

$$\Delta H = 0 \quad \text{. . . . . dans T}$$

$$H = \frac{1}{\rho} \quad \text{. . . . . sur S.}$$

Concevons une fonction V qui coïncide avec H à l'intérieur de S et avec $\frac{1}{\rho}$ à l'extérieur. Cette fonction est continue dans tout l'espace ; elle se comporte régulièrement à l'infini ; en outre elle est harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S. Si l'on reprend les notations du paragraphe **117**, on peut écrire :

$$V_2 - V_1 = 0$$

$$\frac{dV_2}{dn} - \frac{dV_1}{dn} = \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} + \frac{dH}{dn} = \frac{dG}{dn}.$$

D'où :

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{dG}{dn}\frac{d\omega'}{r},$$

en vertu d'une formule établie précédemment (§ **120**).

On voit que V est le potentiel newtonien d'une couche simple de matière attirante répandue sur S avec la densité :

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{dG}{dn}$$

en chaque point.

A l'extérieur de S, V coïncide avec $\frac{1}{\rho}$. Donc, pour un point qui n'est pas situé dans le domaine T, le potentiel dû à la simple couche considérée est le même que le potentiel dû à l'unique point P.

A l'intérieur de S, V coïncide avec H, mais on a :

$$\frac{1}{\rho} > G > 0,$$

c'est-à-dire :

$$0 < H < \frac{1}{\rho}$$

en tout point de T qui n'est ni en P ni sur S. Donc, en tout point situé dans le domaine T, le potentiel dû à la simple couche considérée est plus petit que le potentiel dû à P.

On sait que $\frac{dG}{dn}$ est négatif en tout point de S : cela résulte de ce que G est nul sur S et positif à l'intérieur de S. On a donc :

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{dG}{dn} > 0.$$

Ainsi les masses qui constituent la simple couche dont le potentiel est V sont toutes positives.

Les mêmes propositions sont vraies si le point P, au lieu de porter l'unité de masse, porte une masse égale à m. Si m est positif, la densité de la couche superficielle que l'on fabrique est encore positive en chaque point de S.

Les mêmes considérations peuvent encore être faites à propos de masses distribuées d'une façon quelconque dans T : points discrets, volumes, surfaces ou lignes.

La couche superficielle obtenue s'appelle *couche équivalente* aux masses intérieures. L'opération qui consiste à remplacer des masses par la couche équivalente porte le nom de *balayage du domaine T.*

En résumé, on voit que le balayage d'un domaine qui ne contient que des masses positives ne change pas le potentiel en un point extérieur; il le diminue en un point intérieur; enfin cette opération n'introduit jamais de masses négatives.

REMARQUE. — On a :

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{S}\frac{dG}{dn}\,d\omega' = 1.$$

Donc le balayage, dans le cas d'un point P unique portant l'unité de masse, ne change pas la masse totale considérée. En d'autres termes, la masse totale de la couche équivalente est égale à la masse primitive.

Il en est évidemment de même dans le cas d'une distribution quelconque de masses.

122. — On peut définir de même une opération qui s'appellera le balayage de la région de l'espace extérieure à S.

Soit P un point attirant portant l'unité de masse située à l'extérieur de S. Appelons encore ρ la distance de P à un point M quelconque de l'espace. Si G désigne la fonction de Green relative au point P et au domaine extérieur à S, on a :

$$G = \frac{1}{\rho} - H$$

avec :

$$\Delta H = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{à l'extérieur de S}$$

$$H = \frac{1}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{sur S.}$$

Imaginons encore une fonction V qui coïncide avec $\frac{1}{\rho}$ à l'intérieur de S et avec H à l'extérieur. On a cette fois :

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{dG}{dn}\,\frac{d\omega'}{r}$$

et l'on voit encore que V est le potentiel d'une simple couche répandue sur S avec la densité :

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{dG}{dn}$$

en chaque point. Ici on a :

$$\frac{dG}{dn} > 0,$$

car le sens de la normale extérieure à la surface S est maintenant celui de la normale dirigée vers l'intérieur du domaine envisagé.

Sans insister davantage, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes :

1° Le balayage ne modifie pas le potentiel à l'extérieur de S.

2° Le balayage fait diminuer le potentiel à l'intérieur de S.

3° Le balayage n'introduit pas de masses négatives.

Ces propositions se démontreraient comme dans le premier cas.

Voyons ce qui arrive pour la masse totale : je dis qu'elle a diminué.

En effet considérons une sphère Σ de rayon R. Supposons R assez grand pour que le point P et la surface S soient à l'intérieur de Σ.

La fonction G est harmonique à l'extérieur de Σ et régulière à l'infini. On a donc :

$$G = \sum \frac{\Pi'_n}{r^{2n+1}} = \frac{\Pi'_0}{r} + \frac{\Pi'_1}{r^3} + \dots\dots$$

et ce développement est valable pour :

$$r > R.$$

Π'_0 est une constante. Voyons son signe.

D'abord on ne peut pas avoir :

$$\Pi'_0 < 0,$$

car, pour R très grand, c'est cette constante qui donne son signe à G. Or, nous savons que G est positif à l'extérieur de S.

De plus je dis qu'on ne peut pas avoir :

$$\Pi'_0 = 0.$$

En effet, si cela était, ce serait Π'_1 qui donnerait son signe à G pour r très grand. On devrait donc pouvoir écrire :

$$\Pi'_1 \geqq 0.$$

Or, posons :

$$\Pi'_p = r^p X'_p.$$

On a :

$$\int X'_p X'_q d\tau = 0,$$

si $p \neq q$, l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la sphère de rayon 1. Prenons :

$$p = 1, \quad q = 0.$$

On déduit de là :

$$\int X'_1 d\tau = 0.$$

Donc X'_1, et par suite Π'_1 ne peut pas avoir un signe constant. Donc Π'_0 ne peut pas être nul.

On conclut de tout cela :

$$\Pi'_0 > 0,$$

l'égalité étant exclue. Or :

$$G = \frac{X'_0}{r} + \frac{X'_1}{r^2} + \frac{X'_2}{r^3} + \dots..$$

D'où :

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{X'_0}{r^2} - \frac{2X'_1}{r^3} + \dots..$$

Lorsque r est très grand, c'est Π'_0 qui donne son signe. On a :

$$\Pi'_0 > 0$$

$$X'_0 > 0.$$

D'où :

$$\frac{dG}{dr} < 0$$

pour r très grand.

Cela posé, si l'on appelle M la masse totale de la couche attirante répandue sur S après le balayage, on a :

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dG}{dn} d\omega'.$$

On peut écrire :

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dG}{dn} d\omega' - \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \frac{dG}{dr} d\omega' + \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \frac{dG}{dr} d\omega'.$$

Or la différence des deux premières intégrales est égale à 1. Quant à la troisième intégrale, nous venons de voir qu'elle est négative dès que r est assez grand. On a donc :

$$M < 1.$$

La masse totale a diminué par suite du balayage.

Tout ce que nous venons de dire s'applique encore sans modification si les masses primitives considérées, au lieu d'être condensées en un point, sont distribuées d'une façon quelconque.

123. — Pour pouvoir faire le balayage d'un domaine T, il faut deux conditions :

1° Savoir former les fonctions de Green G relatives à ce domaine.

2° Savoir que $\frac{dG}{dn}$ existe et est intégrable sur le bord du domaine T.

Ces deux conditions sont remplies s'il s'agit d'une sphère. On sait donc faire le balayage d'une sphère.

Avant de montrer les conséquences que l'on peut tirer des théorèmes précédents, nous allons revenir sur quelques-uns de ceux-ci en nous plaçant dans le cas particulier où il s'agit du balayage intérieur d'une sphère.

124. Balayage d'une sphère. — Soient (fig. 81) une sphère S de centre O et de rayon a. Appelons M un point situé à l'intérieur de la sphère et M′ un point situé au centre de gravité de l'élément $d\omega'$ de la surface de la sphère. Posons :

$$\overline{OM} = \rho, \quad \overline{OM'} = a, \quad \overline{MM'} = r.$$

Imaginons maintenant dans l'espace une distribution de matière attirante pour laquelle la densité soit μ au centre de gravité de l'élément de volume $d\tau$. Désignons par V le potentiel ainsi engendré. On a :

$$V = V_1 + V_2$$

en appelant V_1 le potentiel dû aux masses intérieures à la sphère et V_2 le potentiel dû aux masses extérieures. Le balayage a pour

effet de remplacer chaque masse $\mu d\tau$ située à l'intérieur de la sphère par une couche équivalente répandue sur la surface et ayant pour densité en M' :

$$\mu' = \frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} \mu d\tau.$$

Il résulte de là que la densité en M' de la couche équivalente

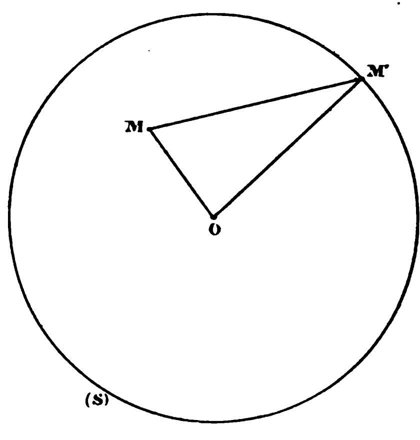


Fig. 81.

finale, une fois qu'on a terminé le balayage, est donnée par l'intégrale triple :

$$\mu'' = \int \mu \frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} d\tau,$$

étendue à la sphère considérée. Posons alors :

$$U_1 = \int_{(S)} \frac{\mu''}{r} d\omega'$$

$$U_2 = V_2.$$

En supposant $\mu' > 0$, on a :

$$\mu' > 0, \quad \mu'' > 0.$$

D'où :

$$U_1 > 0, \quad U_2 > 0.$$

D'autre part :

$$U_1 = V_1 \ldots \text{ à l'extérieur de S}$$
$$U_1 < V_1 \ldots \text{ à l'intérieur de S}$$

Prenons :

$$U = U_1 + U_2.$$

On a finalement :

$$U = V \ldots \text{ à l'extérieur de S}$$
$$U < V \ldots \text{ à l'intérieur de S}$$

et d'ailleurs U est positif et continu dans tout l'espace.

Les mêmes conclusions sont encore vraies si V est un potentiel dû à des distributions superficielles ou linéaires. On le démon-

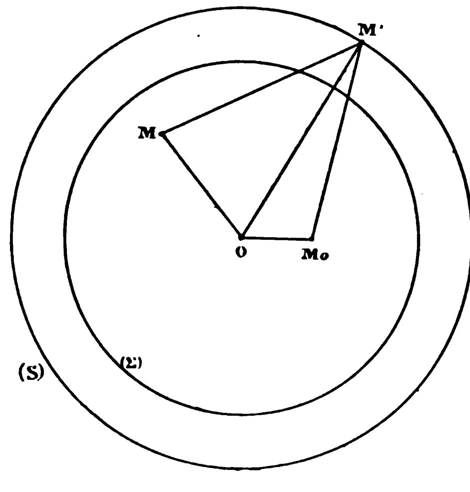


Fig. 82.

trerait exactement de la même façon. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce point.

125. Théorème de Harnack. — Soit une sphère S de centre O et de rayon a. Prenons un point M à l'intérieur de la sphère et posons (fig. 82) :

$$\overline{OM} = \rho.$$

Considérons maintenant une suite illimitée de fonctions :

$$V_1 V_2 \ldots V_i \ldots$$

harmoniques et positives dans S. Désignons par :

$$V'_1 V'_2 \ldots V'_i \ldots$$

les valeurs de ces fonctions en un point M' situé au centre de gravité de l'élément $d\omega'$ de la surface de la sphère.

Nous avons prouvé (§ 97) que, si la série :

$$\Sigma V'_i$$

est convergente, sa somme :

$$V = \Sigma V_i$$

est une fonction harmonique dans S.

On a :

$$V_i = \int_S V'_i \frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} d\omega',$$

en posant :

$$\overline{MM'} = r.$$

Soit alors une sphère Σ concentrique à S et de rayon b inférieur à a. Supposons que le point M soit à l'intérieur de Σ. Posons :

$$\frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a r^3} = \theta.$$

On a :

$$r > a - \rho > a - b$$

et :

$$a^2 - \rho^2 < a^2.$$

D'où :

$$\theta < \frac{a^2}{4\pi a (a - b)^3}.$$

Appelons B_0 cette limite supérieure de θ. On voit que l'on peut écrire :

$$V_i < B_0 \int_S V'_i d\omega'.$$

Si donc la série :

$$\int_{(S)} V'_1 d\omega' + \int_{(S)} V'_2 d\omega' + \ldots + \int_{(S)} V'_i d\omega' + \ldots$$

est convergente, la série :

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_i + \ldots$$

l'est elle-même, et sa convergence est uniforme.

Nous avons vu (§ 97) que l'on peut aussi assigner une limite supérieure B_1 aux trois quantités :

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|.$$

Donc les séries :

$$\sum \frac{\partial V_i}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \sum \frac{\partial V_i}{\partial z}$$

sont absolument et uniformément convergentes quand la série :

$$\sum \int_{(S)} V'_i d\omega'$$

est elle-même convergente.

Il en est encore de même pour les séries :

$$\sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} \qquad \sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial y \partial z}$$

$$\sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} \qquad \sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial z \partial x}$$

$$\sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} \qquad \sum \frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y}$$

et en général de toutes les séries déduites par dérivation terme à terme de la série :

$$\Sigma V_i.$$

Cela se voit toujours par le même procédé.

Nous avons conclu de tout cela, au paragraphe 97, que la fonction V est harmonique à l'intérieur de la sphère, si la série :

$$\sum \int_{(S)} V'_i d\omega'$$

est convergente.

Nous voulons aller un peu plus loin à présent et montrer que la série :

$$\sum \int_{(S)} V'_i d\omega'$$

est convergente, si la série :

$$\Sigma V_i$$

est convergente en un point M_0 de la sphère.

126. Appelons :

$$V_1^0 V_2^0 \ldots V_i^0 \ldots$$

les valeurs des fonctions :

$$V_1 V_2 \ldots V_i \ldots$$

au point M_0. Posons d'ailleurs :

$$\overline{OM_0} = \rho_0, \quad \overline{M_0 M'} = r_0.$$

On a :

$$V_i^0 = \int_{(S)} \frac{(a^2 - \rho^2_0) V'_i d\omega'}{4\pi a r^3_0}.$$

Mais on peut écrire l'inégalité :

$$r_0 < a + \rho_0.$$

D'où :

$$\frac{a^2 - \rho^2_0}{4\pi a r^3_0} > \frac{a - \rho_0}{4\pi a (a + \rho_0)^2},$$

ce qui donne :

$$V^0_i > \frac{a - \rho_0}{4\pi a (a + \rho_0)^2} \int_{(S)} V'_i d\omega'$$

et enfin :

$$\int_{(S)} V'_i d\omega' < NV^0_i,$$

en posant :

$$\frac{1}{N} = \frac{a - \rho_0}{4\pi a (a + \rho_0)^2}.$$

Or, par hypothèse, la série :

$$\Sigma V^0_i$$

est convergente. Donc il en est de même de la série :

$$\sum \int_{(S)} V'_i d\omega'$$

et, par suite, la fonction V est harmonique.

C. Q. F. D.

127. Considérons un domaine T limité par une surface fermée S. Ce domaine est supposé connexe, mais d'un ordre de connexion quelconque.

Soit une suite illimitée de fonctions harmoniques :

$$V_1 V_2 \ldots V_i \ldots$$

définies et positives dans T. Je dis que, si la série :

$$\Sigma V_i$$

est convergente en un point M_0 de T, elle est convergente en tout point de T.

En effet, prenons un point M quelconque situé à l'intérieur de T.

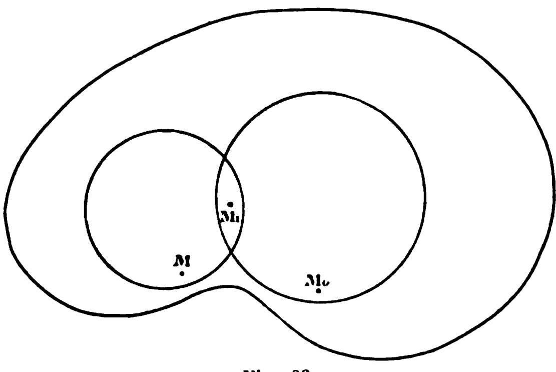


Fig. 83.

Si le point M est contenu dans une sphère qui renferme aussi le point M_0 et qui soit tout entière à l'intérieur de T, la proposition est évidente : en effet, chacune des fonctions V_i est harmonique et positive dans cette sphère, en sorte qu'on est ramené au cas étudié dans le paragraphe précédent.

Supposons maintenant (fig. 83) qu'on ne puisse trouver

aucune sphère remplissant les conditions prescrites, mais que

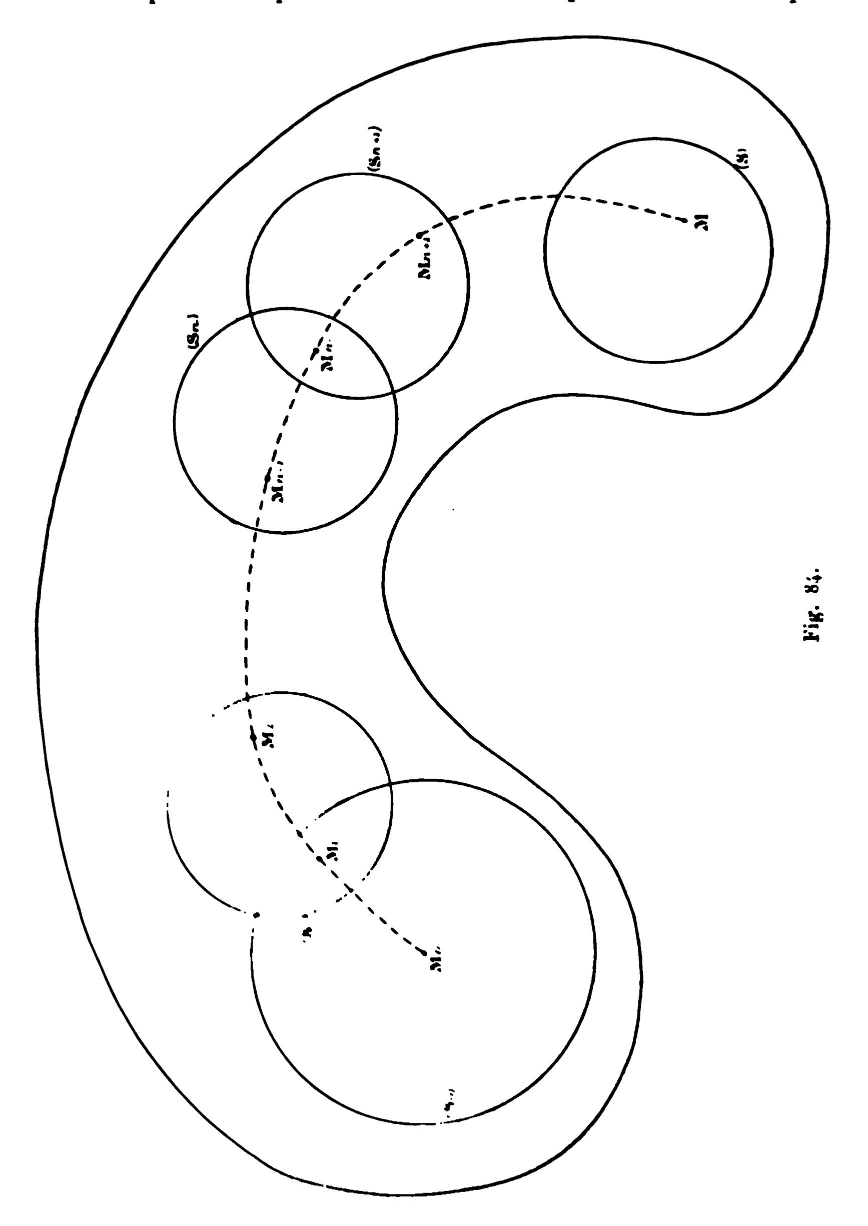


Fig. 84.

l'on puisse trouver dans T un point M_1 tel qu'il existe deux

sphères, l'une contenant M_0 et M_1, l'autre contenant M_1 et M, et toutes deux contenues dans T. Alors, en vertu de la remarque que nous venons de faire, la convergence de la série :

$$\Sigma V_i$$

en M_0 entraîne sa convergence en M_1 et celle-ci à son tour entraîne la convergence en M. La proposition énoncée est donc encore vérifiée.

En général, à cause de la connexion du domaine T, on peut tracer un chemin continu allant de M_0 en M sans sortir de T. Sur ce chemin, il est manifeste que l'on peut trouver un nombre limité de points (fig. 84) :

$$M_0 M_1 M_2 \ldots M_n M_{n+1} \ldots M$$

tels qu'il y ait toujours une sphère contenue dans T et contenant à son intérieur deux points consécutifs M_n et M_{n+1}. La démonstration du théorème en question peut alors se faire de proche en proche. La série :

$$\Sigma V_i$$

est convergente en M_0; donc elle l'est en M_1, comme on le voit en considérant la première sphère. La convergence en M_1 entraîne la convergence en M_2, comme on le voit en considérant la deuxième sphère. En général, la convergence en M_n entraîne la convergence en M_{n+1}, comme on le voit en considérant la $(n+1^e)$ sphère. Il est clair qu'après un nombre limité d'opérations on sera assuré de la convergence en M.

C. Q. F. D.

128. Voici une importante application des théorèmes précédents.

Soit un domaine T limité par une surface fermée S.

Considérons une fonction Φ définie et continue en tout point de S. Nous regarderons cette fonction comme donnée. De plus nous supposerons qu'elle est positive et non nulle en tout point de S.

Cela posé, traçons une sphère Ω assez grande pour contenir toute la surface S à son intérieur. On peut toujours imaginer une

fonction U définie et continue dans Ω, positive et non nulle dans le même domaine, prenant enfin les valeurs Φ sur S.

Donnons-nous maintenant une suite de nombres positifs :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n \dots$$

tels que la série :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

soit convergente. On sait qu'il est possible de construire une suite de fonctions :

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_n \dots$$

définies dans Ω et holomorphes en tout point de ce domaine, de telle façon que l'on ait :

$$0 < P_n < \varepsilon_n$$

pour toutes les valeurs de l'indice n et que la somme de la série absolument et uniformément convergente :

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots$$

soit la fonction U donnée. On peut, par exemple, s'arranger de manière que les fonctions P_i soient des polynômes entiers en x, y, z.

Supposons alors que l'on sache, pour toutes les valeurs de l'indice n, former une fonction V_n harmonique dans T et prenant sur S les mêmes valeurs que P_n. On a :

$$0 < V_n < \varepsilon_n.$$

Donc la série :

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots,$$

dont tous les termes sont des fonctions harmoniques et positives dans T, est absolument et uniformément convergente en tout point de T. En vertu du théorème de Harnack, nous concluons de là que la somme V de la série précédente est une fonction harmonique dans T prenant sur S les valeurs Φ.

Nous voyons par là que l'on saura résoudre le problème de Dirichlet dans le cas le plus général dès qu'on saura le résoudre en supposant que la fonction cherchée prenne sur S les mêmes valeurs qu'un polynôme donné.

REMARQUE. — Nous avons supposé pour plus de simplicité, dans la démonstration précédente, que la fonction donnée Φ était positive et non nulle en tout point de S. On peut toujours se placer dans ce cas pour résoudre le problème de Dirichlet.

En effet supposons que Φ ait un signe quelconque. Posons :

$$|\Phi| < M \dots (M = C^{te}).$$

On peut toujours écrire :

$$\Phi = M - (M - \Phi).$$

On a :

$$M - \Phi > 0.$$

Soit V une fonction harmonique dans T prenant sur S les valeurs $M - \Phi$: nous admettons qu'on peut la déterminer. Cela posé, il est clair que la fonction :

$$M - V$$

est harmonique dans T et prend sur S les valeurs Φ.

129. Méthode du balayage. — Proposons-nous de construire une fonction V harmonique dans un domaine T limité par une surface fermée S et prenant sur S les mêmes valeurs qu'un polynôme donné P.

Commençons par tracer une sphère Ω contenant à son intérieur tout le domaine T.

Cela posé, il est possible de trouver une infinité de sphères Ω_i formant une suite à indices entiers positifs et jouissant des propriétés suivantes :

1° Chacune des sphères Ω_i est tout entière intérieure à T.

2° Tout point de T est intérieur à l'une au moins des sphères Ω_i.

Concevons, en effet, une succession de nombres positifs :

$$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_i, \dots$$

décroissants et tendant vers zéro. Imaginons maintenant une série de régions :

$$R_1, R_2, \dots R_i, \dots$$

s'enveloppant mutuellement et tendant à se confondre avec T.

La région R_i par exemple est définie comme étant l'ensemble de tous les points de T dont la distance minimum à S est supérieure à δ_i. Traçons une triple série de plans parallèles aux plans coordonnés, l'écartement de deux plans consécutifs de la même série étant un peu inférieur à $\frac{\delta_i}{\sqrt{3}}$. La région R_i est ainsi partagée en un nombre limité de cubes dont la diagonale est légèrement inférieure à δ_i. Il est clair que ces cubes sont tous intérieurs à T. D'ailleurs tout point de R_i appartient à l'un de ces cubes.

Appelons :

$$\delta_i - \varepsilon_i$$

la longueur de la diagonale d'un de ces cubes. A chaque région R_i est attaché un nombre positif ε_i inférieur à δ_i. Nous supposons que la suite :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_i \ldots$$

soit convergente et ait zéro pour limite.

Cela étant, du centre de chacun des cubes obtenus, décrivons une sphère ayant pour rayon $\delta_i - \frac{\varepsilon_i}{2}$. Nous construisons ainsi un nombre limité de sphères :

$$\Omega^1{}_i \Omega^2{}_i \ldots \Omega^n_i.$$

Toutes ces sphères sont intérieures à T et tout point de R_i est intérieur à l'une au moins de ces sphères. En faisant la même opération pour chaque région R_i, on obtient une série de sphères remplissant bien les conditions prescrites :

1° Toutes ces sphères sont intérieures à T.

2° Tout point intérieur à T, étant intérieur aux régions R_i à partir d'une certaine valeur de i, est intérieur à l'une au moins des sphères considérées.

3° L'ensemble des sphères précédentes est dénombrable, puisque l'ensemble des régions R_i l'est lui-même et qu'il ne correspond à chaque région R_i qu'un nombre limité de sphères.

La proposition annoncée est donc établie.

Nous considérons les sphères Ω_i dans l'ordre suivant :

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 \ldots$$

de manière à considérer chacune d'elles une infinité de fois.

130. — Prenons maintenant le polynôme donné P et formons l'expression ΔP. Supposons d'abord que l'on ait :

$$\Delta P < 0$$

en tout point de Ω. Nous verrons ensuite comment on peut lever cette restriction.

Posons :

$$W_0 = \int_{(\Omega)} \frac{\mu' d\tau}{r}$$

et :

$$\mu' = -\frac{\Delta P}{4\pi}.$$

On a :

$$\mu' > 0, \quad W_0 > 0.$$

De plus, W_0 est le potentiel newtonien d'un volume attirant. D'où :

$$\Delta W_0 = -4\pi\mu' = \Delta P$$

en tout point de Ω.

Effectuons maintenant le balayage de chacune des sphères Ω_i, en prenant celle-ci successivement dans l'ordre indiqué. Soit W_i ce qu'est devenu le potentiel W_0 après la i^e opération. On a évidemment, en vertu des propriétés du balayage :

$$W_i \leqq W_{i-1}$$

en tout point de Ω. D'autre part, on peut écrire :

$$W_i > 0,$$

puisque le balayage n'introduit jamais de masses négatives.

Considérons la suite :

$$W_1 W_2 \ldots W_i \ldots.$$

Elle est convergente, puisqu'elle est formée de termes tous positifs qui vont toujours en décroissant ou du moins qui ne croissent jamais. Soit W la limite de cette suite : W est une fonction définie en tout point de Ω.

On a évidemment :

$$W_0 > W > 0.$$

Étudions les propriétés de W.

Considérons une sphère Ω_α quelconque. Elle est balayée une infinité de fois, aux opérations numérotées, par exemple :

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots$$

Considérons les fonctions :

$$W_{\alpha_1} W_{\alpha_2} \ldots W_{\alpha_i} \ldots$$

Elles forment une suite convergente ayant W pour limite. D'ailleurs, on a :

$$\Delta W_{\alpha_i} = 0 \ldots \text{ dans } \Omega_\alpha$$

quel que soit i. Mais on peut écrire :

$$W = - W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_1} - W_{\alpha_2}) + \ldots + (W_{\alpha_{i-1}} - W_{\alpha_i}) + \ldots$$

Tous les termes de cette série sont des fonctions harmoniques dans Ω_α ; ces fonctions sont positives dans le même domaine, à l'exception de la première ; enfin la série envisagée est convergente en tout point de Ω_α. Donc, en vertu du théorème de Harnack, la fonction W est harmonique dans Ω_α. Mais étant donné un point quelconque de T, on peut toujours trouver une sphère Ω_α au moins qui contienne ce point à son intérieur. On voit par là que *la fonction* W *est harmonique en tout point de* T.

131. Voyons quelles sont les valeurs prises par la fonction W sur S.

Supposons que la surface S possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés. Soit M_0 un point de S. Voyons vers quelle limite tend W quand le point courant M (x, y, z), d'abord situé à l'intérieur de T, tend par un chemin quelconque vers M_0.

En vertu des hypothèses que nous venons de faire, on peut construire une sphère S_0 tangente extérieurement à S en M_0. Construisons une fonction U jouissant des propriétés suivantes :

$$\Delta U = 0 \ \ldots\ldots \text{ à l'extérieur de } S_0$$

$$U = W_0 \ \ldots\ldots \text{ sur } S_0$$

$$U = 0 \ \ldots\ldots \text{ à l'infini.}$$

Sachant résoudre le problème de Dirichlet pour la sphère, nous savons former la fonction U.

On a évidemment :

$$U \leqq W \leqq W_0$$

en tout point M de T. Mais, quand M tend vers M_0, U et W_0 tendent vers la même limite. Il en est donc de même de W.

Ainsi W prend sur S les mêmes valeurs que W_0

Finalement, on a :

$$\Delta W = 0 \ldots \text{ dans T}$$
$$W = W_0 \ldots \text{ sur S}$$

pourvu que S ne présente aucune singularité.

132. Posons maintenant :

$$V = P - W_0 + W.$$

On a :

$$\Delta W_0 = \Delta P$$
$$\Delta W = 0.$$

D'où :

$$\Delta V = 0.$$

D'autre part, il est manifeste que V prend sur S les mêmes valeurs que le polynôme donné P.

Le problème de Dirichlet est donc résolu dans le cas particulier où nous nous sommes placés. Mais nous savons que le théorème de Harnack permet de passer de ce cas particulier au cas général. *Donc le principe de Dirichlet est complètement établi.*

133. Nous avons supposé :

$$\Delta P < 0$$

dans Ω. Cela ne restreint pas la généralité. En effet, on peut toujours écrire :

$$P = P_1 - P_2,$$

les polynômes P_1 et P_2 étant choisis de façon que l'on ait :

$$\Delta P_1 < 0, \quad \Delta P_2 < 0.$$

La méthode précédente permet de trouver deux fonctions :

$$V_1 \quad \text{et} \quad V_2$$

harmoniques dans T et prenant sur S respectivement les mêmes valeurs que :

$$P_1 \quad \text{et} \quad P_2.$$

Posons alors :

$$V = V_1 - V_2.$$

Il est clair que la fonction V est harmonique dans T et prend sur S les mêmes valeurs que P.

134. Ajoutons, pour terminer, que la méthode précédente s'applique encore avec succès si la surface S présente un nombre limité de points coniques ordinaires. On trouvera une discussion complète de ce cas au tome XII de l'*American Journal of Mathematics*. (H. Poincaré. — Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique, § 1.)

CHAPITRE VIII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET
LA MÉTHODE DE NEUMANN

135. Principe de la méthode de Neumann. — La méthode du balayage, exposée au chapitre précédent, fournit une démonstration rigoureuse et générale du *Principe de Dirichlet*. La méthode de Neumann, dont nous allons nous occuper maintenant, a le même but. Au point de vue de la généralité, elle est inférieure à la méthode du balayage. Mais elle a l'avantage de bien mettre en évidence l'identité des fonctions harmoniques et des potentiels newtoniens.

Nous étudierons concurremment le problème intérieur et le problème extérieur de Dirichlet. Nous nous placerons dans le cas de l'espace à trois dimensions. Mais ce n'est que pour fixer les idées. On verra sans peine que les raisonnements peuvent encore être faits quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Considérons une surface fermée S limitant un domaine intérieur T et un domaine extérieur T′. Nous supposerons que la surface S possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés. Cela posé, nous voulons résoudre le problème de Dirichlet à la fois pour le domaine T et pour le domaine T′.

La méthode de Neumann consiste à chercher une double couche portée par S dont le potentiel newtonien soit précisément la fonction harmonique inconnue que l'on veut construire.

Nous verrons que l'on peut toujours réussir à déterminer la double couche en question dans le cas du problème intérieur. Mais, pour le problème extérieur, il n'en est plus ainsi. Il est

facile de se rendre compte de cette dernière particularité. Soit V une fonction harmonique à l'extérieur d'une sphère de rayon R et régulière à l'infini. On a :

$$V = \frac{X'_0}{\rho} + \frac{X'_1}{\rho^2} + \dots$$

en appelant :

$$X'_0, X'_1 \dots$$

des fonctions sphériques et en posant :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ce développement est valable pour :

$$\rho > R.$$

Supposons que V soit un potentiel newtonien. Alors on peut écrire :

$$\lim_{\rho=\infty} \rho V = M,$$

M étant la masse totale qui engendre le potentiel V. Si ce potentiel est celui d'une double couche, on a :

$$M = 0.$$

Mais, en général :

$$M = X'_0.$$

Cela entraîne donc :

$$X'_0 = 0.$$

Par conséquent, une condition est requise pour qu'on puisse résoudre le problème extérieur de Dirichlet au moyen du potentiel d'une double couche.

Nous verrons d'ailleurs que l'on parvient toujours à résoudre le problème extérieur en superposant sur la même surface S une simple couche et une double couche de matière attirante.

136. Rappelons d'abord, en quelques mots, les propriétés fondamentales des potentiels de double couche.

Soit W un pareil potentiel. C'est une fonction régulière à l'infini et harmonique en tout point de l'espace, sauf sur la surface même qui porte la double couche.

Lorsque le point courant M se rapproche indéfiniment d'un point M_0 de S en restant intérieur à S, W tend vers une limite que nous désignerons par V. Lorsque M tend vers M_0 en restant à l'extérieur de S, W a encore une limite que nous désignerons cette fois par V'. Si μ est la densité de la double couche au point M_0, on a :

$$V - V' = -4\pi\mu.$$

Enfin la valeur de W en M_0 est :

$$U = \frac{V + V'}{2}.$$

Nous supposons ici la matière attirante qui constitue la double couche répandue sur une surface fermée S. Les éléments $d\omega'$ de S sont alors regardés comme ayant leurs côtés négatifs tournés vers l'intérieur de S. Quant à l'angle solide $d\sigma'$ sous lequel $d\omega'$ est vu du point x, y, z, il est positif ou négatif suivant que $d\omega'$ est vu par sa face externe ou par sa face interne.

137. Soit Φ une fonction donnée, définie en tout point de S, uniforme et continue dans le même domaine. Appelons λ un paramètre réel.

Proposons-nous de déterminer une double couche portée par S, de telle façon que son potentiel W satisfasse au voisinage de chaque point de S à la relation :

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi.$$

C'est ce que j'appellerai le *problème de Neumann*.

Supposons ce problème résolu et faisons :

$$\lambda = 1.$$

Le potentiel W correspondant vérifiera la relation :

$$V' = -\Phi.$$

Le problème de Dirichlet *extérieur* est ainsi résolu.

Faisons maintenant :

$$\lambda = -1.$$

Le potentiel W correspondant vérifiera la relation.

$$V = \Phi.$$

Cette fois, ce sera le problème de Dirichlet *intérieur* qui sera résolu.

Finalement, on voit que nous sommes ramenés à la recherche du problème de Neumann.

138. Considérons W comme une fonction de λ. Admettons que W puisse être développé en série ordonnée suivant les puissances croissantes de λ. On a alors

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \ldots + \lambda^i W_i + \ldots \\ V &= V_0 + \lambda V_1 + \ldots + \lambda^i V_i + \ldots \\ V' &= V'_0 + \lambda V'_1 + \ldots + \lambda^i V'_i + \ldots \\ U &= U_0 + \lambda U_1 + \ldots + \lambda^i U_i + \ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Voyons si de pareilles séries peuvent vérifier toutes les conditions imposées à la fonction W que l'on cherche.

D'abord il faut, pour cela, que l'on ait :

$$\Delta W_0 = 0, \quad \Delta W_1 = 0, \ldots \quad \Delta W_i = 0 \ldots$$

en tout point de l'espace, sauf sur S. Cela aura lieu si nous prenons pour :

$$W_0 \quad W_1 \ldots \quad W_i \ldots$$

les potentiels de certaines doubles couches.

Maintenant la relation :

$$V - V' = \lambda (V + V') + 2\Phi$$

donne :

$$\begin{aligned} &V_0 - V'_0 = 2\Phi \\ &V_1 - V'_1 = V_0 + V'_0 = 2U_0 \\ &V_2 - V'_2 = V_1 + V'_1 = 2U_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &V_i - V'_i = V_{i-1} + V'_{i-1} = 2U_{i-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on appelle :

$$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \dots$$

les densités des doubles couches dont les potentiels sont respectivement :

$$W_0 W_1 W_2 \dots W_i \dots$$

on sait que l'on doit avoir :

$$V_0 - V'_0 = -4\pi\mu_0$$
$$V_1 - V'_1 = -4\pi\mu_1$$
$$V_2 - V'_2 = -4\pi\mu_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$V_i - V'_i = -4\pi\mu_i.$$
$$\cdots\cdots$$

D'où :

$$\mu_0 = -\frac{\Phi}{2\pi}$$
$$\mu_1 = -\frac{U_0}{2\pi}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mu_i = -\frac{U_{i-1}}{2\pi}$$
$$\cdots\cdots$$

ce qui détermine de proche en proche les densités des doubles couches envisagées.

Cela posé, nous avons deux questions à résoudre :

1°..... Peut-on construire les séries (1)?
2°..... Ces séries sont-elles convergentes ?

C'est ce que nous allons examiner.

139. Développement de la méthode de Neumann.— Posons pour abréger :

$$d\theta' = -\frac{d\sigma'}{2\pi}.$$

Prenons :

$$W_i = \int_{(S)} \mu_i d\sigma'.$$

W_i sera le potentiel d'une double couche portée par S. Donc la fonction W_i sera régulière à l'infini et harmonique en tout point de l'espace non situé sur S.

D'autre part, on aura bien :

$$V_i - V'_i = -4\pi\mu_i$$

et, si l'on pose :

$$\mu_i = -\frac{U_{i-1}}{2\pi},$$

on pourra écrire :

$$V_i - V'_i = 2U_{i-1}.$$

Donc W_i remplira toutes les conditions prescrites.

Les fonctions W_i peuvent être formées de proche en proche à partir de la fonction Φ donnée.

En effet, on a d'abord :

$$W_0 = \int_{(S)} \Phi d\theta'.$$

Maintenant, W_0 étant connu, il est clair que $V_0\, V'_0\, U_0$ le sont aussi. Donc on peut calculer μ_1. D'où :

$$W_1 = \int_{(S)} U_0 d\theta'.$$

Et ainsi de suite.

Finalement on peut écrire :

$$W_0 = \int_{(S)} \Phi d\theta'$$

$$W_1 = \int_{(S)} U_0 d\theta'$$

$$W_2 = \int_{(S)} U_1 d\theta'$$

. . . .

$$W_i = \int_{(S)} U_{i-1} d\theta'$$

. . . .

Donc les fonctions W_i peuvent être formées de proche en proche et, par suite, les séries (1) peuvent être construites sans ambiguïté.

Remarque. — Si l'on a :

$$\Phi = 1,$$

il est clair que W_0 égal à

2	en tout point de T
1	en tout point de S
0	en tout point de T′

car :

$$\int_{(S)} d\theta' = 2 \ldots \text{si } x, y, z \text{ est dans } T$$

$$\int_{(S)} d\theta' = 1 \ldots \text{si } x, y, z \text{ est sur } S$$

$$\int_{(S)} d\theta' = 0 \ldots \text{si } x, y, z \text{ est dans } T'.$$

140. Étudions maintenant les fonctions W_i.

Supposons que la surface S *soit convexe et possède en chaque point des rayons de courbure finis.* Nous excluons ainsi de nos considérations les surfaces qui ont des portions planes ou cylindriques.

Ces hypothèses ne sont pas toutes indispensables. Neumann a étendu sa méthode à toutes les surfaces qui ne sont pas *biétoilées*, c'est-à-dire où tous les plans tangents ne vont pas passer par l'un ou l'autre de deux points fixes (comme cela aurait lieu dans le cas d'un cube ou dans le cas du solide commun à deux cônes). Mais, pour simplifier, nous nous bornerons au cas, déjà très général, qui a été signalé.

Figurons la surface S (fig. 85). Soit M′ un point de cette surface situé au centre de gravité de l'élément $d\omega'$. En vertu des hypothèses faites sur la nature de la surface S, on peut tracer une sphère Σ tangente à S en M′ et contenant toute la surface à son intérieur. Soit O le centre de cette sphère ; désignons par A le point de Σ qui est diamétralement opposé à M′ ; il est clair que M′A est la normale à S en M′.

Supposons maintenant que le point courant x, y, z vienne se placer sur S en M. Joignons MM′ et posons :

$$\widehat{MM'A} = \psi.$$

On a évidemment :

$$\psi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \psi \geq 0,$$

quel que soit le point M, puisque la surface S est convexe.

Ici $d\sigma'$ est constamment négatif, d'après nos conventions, car.

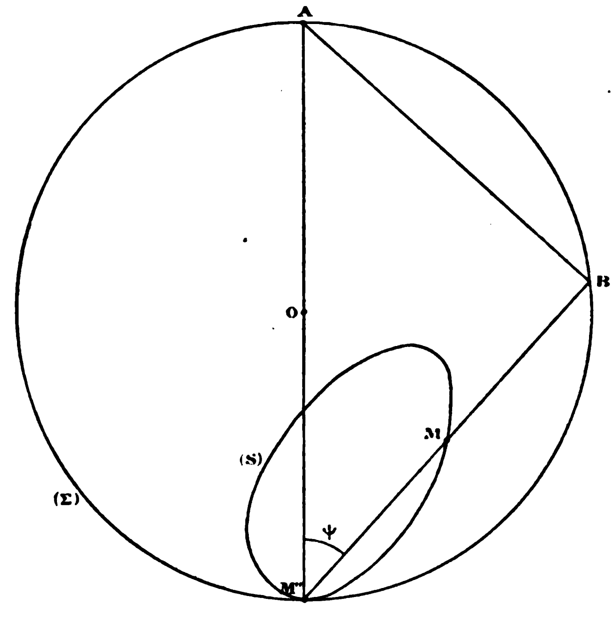


Fig. 85.

la surface S étant convexe, on n'en peut voir, quand on se plac[e] sur elle, que le côté interne. On a donc :

$$d\sigma' = -\frac{d\omega' \cos \psi}{\overline{MM'}^2},$$

si l'on remarque que $d\sigma'$ est, en valeur absolue, l'élément de l[a] sphère de rayon 1 décrite de M comme centre dont la perspec[-] tive sur S est $d\omega'$. On conclut de là :

$$d\theta' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega' \cos \psi}{\overline{MM'}^2}.$$

Posons maintenant :

$$M'A = 2R,$$

en appelant R le rayon de la sphère Σ. La sphère Σ a pu être choisie de façon que la même valeur de R convienne pour tous les points M' de S. On a :

$$M'B = M'A \cos\psi,$$

B étant le point où M'M coupe Σ, puisque le triangle M'BA est rectangle en B. D'autre part :

$$d\theta' > 0$$

et :

$$d\theta' > \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega' \cos\psi}{\overline{M'B}^2}$$

car :

$$M'B > MM'.$$

D'où :

$$d\theta' > \frac{d\omega'}{8\pi R^2 \cos\psi}$$

$$d\theta' > \frac{d\omega'}{8\pi R^2}.$$

Posons :

$$\frac{1}{8\pi R^2} = M.$$

On a finalement :

$$d\theta' > M d\omega'.$$

Cette inégalité nous servira tout à l'heure.

141. Considérons U_i. C'est une fonction continue sur S. Donc elle a une limite supérieure G_i et une limite inférieure H_i. Écrivons :

$$H_i \leqq U_i \leqq G_i.$$

Si le point M est situé sur la surface S, on a :

$$W_{i+1} = U_{i+1}.$$

Donc, en désignant (fig. 86) par U'_i la valeur de U_i en M', on peut écrire :

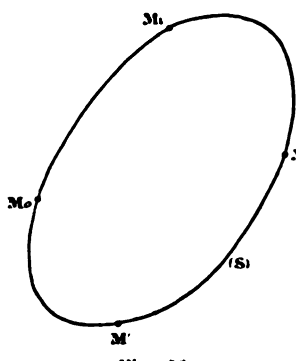


Fig. 86.

$$W_{i+1} = U_{i+1} = \int_{(S)} U'_i \, d\theta'.$$

Si M se déplace sur S, U_{i+1} varie et atteint son maximum G_{i+1} en un certain point M_0 et son minimum H_{i+1} en un certain point M_1. Appelons alors :

$$-2\pi d\theta', \quad -2\pi d\theta'_0, \quad -2\pi d\theta'_1$$

les angles solides sous lesquels $d\omega'$ est vu respectivement des points :

$$M, \ M_0, \ M_1.$$

Dans ces conditions :

$$G_{i+1} = \int_{(S)} U'_i d\theta'_0$$

$$H_{i+1} = \int_{(S)} U'_i d\theta'_1.$$

Or :

$$\int d\theta'_0 = \int d\theta'_1 = 1.$$

Donc on peut écrire :

$$G_i = \int_{(S)} G_i d\theta'_0$$

$$H_i = \int_{(S)} H_i d\theta'_1.$$

On en conclut :

$$G_i - G_{i+1} = \int_{(S)} (G_i - U'_i) \, d\theta'_0 > 0.$$

D'où :

$$G_i > G_{i+1}.$$

Ainsi les quantités G_i vont en décroissant quand i augmente.

On voit de même que les quantités H_i vont en croissant quand i augmente.

D'autre part, on a :

$$d\theta'_0 > M d\omega'$$

et

$$d\theta_1' > M d\omega'.$$

D'où :

$$G_i - G_{i+1} = \int_{(S)} (G_i - U_i')\, d\theta_0'$$

$$G_i - G_{i+1} > M \int_{(S)} (G_i - U_i')\, d\omega'.$$

De même :

$$H_{i+1} - H_i > M \int_{(S)} (U_i' - H_i)\, d\omega'.$$

Ajoutons membre à membre :

$$(G_i - H_i) - (G_{i+1} - H_{i+1}) > M \int_{(S)} (G_i - H_i)\, d\omega'.$$

Enfin :

$$(G_i - H_i) - (G_{i+1} - H_{i+1}) > M\, (G_i - H_i) \int_{(S)} d\omega'.$$

En outre, l'on a :

$$\int_{(S)} d\omega' = S,$$

S étant l'aire de la surface S.

Posons :

$$MS = 1 - \mu,$$

μ étant déterminé par cette égalité même. On peut écrire alors :

$$G_{i+1} - H_{i+1} < \mu\, (G_i - H_i).$$

Comme on a évidemment :

$$G_{i+1} - H_{i+1} > 0, \quad G_i - H_i > 0,$$

on déduit de là :

$$\mu > 0.$$

Mais :

$$M \int_{(S)} d\omega' > 0.$$

Donc :

$$1 - \mu > 0.$$

3me [illegible]

[illegible] $< x <$ [illegible]

Les inégalités [illegible] jouer un rôle essentiel dans les raisonnements.

Considérons les différences :

$$G_1 - H_1$$
$$G_2 - H_2$$
$$\cdots$$
$$G_n - H_n$$
$$\cdots$$

On a :

$$G_2 - H_2 < (G_1 - H_1)x$$
$$G_3 - H_3 < (G_2 - H_2)x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$G_i - H_i < (G_{i-1} - H_{i-1})x.$$

Multiplions membre à membre :

$$G_i - H_i < (G_1 - H_1)x^i$$

Posons :

$$G_1 - H_1 = A;$$

A est une constante bien déterminée et on a :

$$G_i - H_i < Ax^i,$$

pour toutes les valeurs de l'indice i. Cela montre que la différence

$$G_i - H_i$$

tend vers zéro quand i augmente indéfiniment. La série :

$$\Sigma (G_i - H_i)$$

converge comme une progression géométrique décroissante, puisque x est inférieur à l'unité.

En résumé, les quantités G_i forment une suite de termes supérieurs à H_i, qui vont toujours en décroissant ou, du moins, qui ne croissent jamais et les quantités H_i forment une suite de termes

inférieurs à G_0 qui vont toujours en croissant ou, du moins, qui ne décroissent jamais. Donc les deux suites G_i et H_i sont convergentes. Mais la différence :

$$G_i - H_i$$

reste toujours positive et tend vers zéro quand i augmente indéfiniment. Donc les deux suites G_i et H_i définissent la même limite.

J'appellerai C la limite commune des deux suites G_i et H_i.

142. Premier cas. — $C=0$.

On a constamment :

$$G_i > C > H_i.$$

Si on suppose :

$$C = 0,$$

on peut écrire :

$$G_i > 0, \quad H_i < 0.$$

Mais on sait que :

$$G_i - H_i < A\mu^i$$

Donc :

$$G_i < A\mu^i$$
$$-H_i < A\mu^i$$

dans le cas actuel. En d'autres termes, les séries :

$$\Sigma G_i$$

et :

$$\Sigma H_i$$

convergent à la façon d'une progression géométrique décroissante.

D'autre part :

$$V_i - V'_i = V_{i-1} + V'_{i-1} = 2U_{i-1}$$

et :

$$V_i = \frac{V_i + V'_i}{2} + \frac{V_i - V_i}{2} = U_i + U_{i-1}$$

$$V'_i = \frac{V_i + V_i}{2} - \frac{V_i - V'_i}{2} = U_i - U_{i-1}.$$

Mais, puisque l'on a :

$$G_i < A\mu^i$$
$$-H_i < A\mu^i,$$

on peut écrire :

$$|U_i| < A\mu^i.$$

On conclut de là :

$$|V_i| < A\mu^i + A\mu^{i-1}$$
$$|V'_i| < A\mu^i + A\mu^{i-1},$$

c'est-à-dire :

$$|V_i| < B\mu^i$$
$$|V'_i| < B\mu_i,$$

en posant :

$$B = A\left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Maintenant, W_i est une fonction régulière à l'infini et harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S. C'est donc sur la surface S elle-même que W_i atteint son maximum et son minimum. En d'autres termes, on a :

$$|W_i| < \max |V_i| \ldots \text{ dans } T$$
$$|W_i| < \max |V'_i| \ldots \text{ dans } T'.$$

D'où finalement :

$$|W_i| < B\mu^i.$$

aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de S.

143. Reprenons la série :

$$W_0 + \lambda W_1 + \ldots + \lambda^i W_i + \ldots$$

On a, en vertu de ce qui précède :

$$|\lambda^i W_i| < B\,|\lambda\mu|^i.$$

Donc la série envisagée est absolument et uniformément convergente si :

$$|\lambda\mu| < 1,$$

c'est-à-dire si :

$$|\lambda| < \frac{1}{\mu}.$$

Or nous savons que :

$$0 < \mu < 1$$

Donc la série est convergente pour $\lambda = +1$ et pour $\lambda = -1$.

144. Faisons :

$$\lambda = +1$$

et désignons par W la somme de la série convergente :

$$W_0 + W_1 + \ldots + W_i + \ldots$$

Il est clair que W est une fonction de x, y, z bien définie en tout point non situé sur S et régulière à l'infini.

Je dis que W est une fonction harmonique en tout point de l'espace, sauf sur S.

En effet, il en est ainsi de chacune des fonctions W_i. Or on peut écrire :

$$W = \Sigma W_i = \Sigma (B\mu^i + W_i) - \Sigma B\mu^i,$$

car la série :

$$\Sigma B\mu^i,$$

dont tous les termes sont des constantes, est convergente. Mais on a :

$$|W_i| < B\mu^i.$$

D'où :

$$B\mu^i + W_i > 0.$$

D'autre part :

$$B\mu^i + W_i < 2B\mu^i.$$

Ainsi la série :

$$\Sigma (B\mu^i + W_i)$$

a ses termes tous positifs et est uniformément convergente. De plus tous ses termes sont des fonctions harmoniques tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S. Donc sa somme, en vertu du

Mais, puisque l'on a :

$$G_i < A\mu^i$$
$$-H_i < A\mu^i,$$

on peut écrire :

$$|U_i| < A\mu^i.$$

On conclut de là :

$$|V_i| < A\mu^i + A\mu^{i-1}$$
$$|V'_i| < A\mu^i + A\mu^{i-1},$$

c'est-à-dire :

$$|V_i| < B\mu^i$$
$$|V'_i| < B\mu_i,$$

en posant :

$$B = A\left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Maintenant, W_i est une fonction régulière à l'infini et ha nique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S. C'est donc surface S elle-même que W_i atteint son maximum et son mum. En d'autres termes, on a :

$$|W_i| < \max |V_i| \dots \text{ dans } T$$
$$|W_i| < \max |V'_i| \dots \text{ dans } T'.$$

D'où finalement :

$$|W_i| < B\mu^i.$$

aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de S.

143. Reprenons la série :

$$W_0 + \lambda W_1 + \dots + \lambda^i W_i + \dots$$

On a, en vertu de ce qui précède :

$$|\lambda^i W_i| < B\,|\lambda\mu|^i.$$

Donc la série envisagée est absolument et uniformément co gente si :

$$|\lambda\mu| < 1,$$

théorème de Harnack, est une fonction harmonique dans le même domaine.

On peut dire la même chose de la somme de la série :

$$\Sigma B_i \mu^i,$$

puisque celle-ci est une constante.

En définitive, W est une fonction harmonique en tout point de l'espace qui n'est pas situé sur S.

145. Reprenons le cas où λ a une valeur quelconque et voyons ce qui arrive quand le point x, y, z tend vers un point M_0 de S en restant toujours à l'extérieur de S.

Dans ce cas, on a :

$$\lim W_i = V'_i$$

par définition. Mais :

$$V'_i = U_i - U_{i-1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim W_0 &= U_0 - \Phi \\ \lim W_1 &= U_1 - U_0 \\ &\ldots\ldots \\ \lim W_i &= U_i - U_{i-1} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

La série :

$$(U_0 - \Phi) + \lambda(U_1 - U_0) + \ldots + \lambda^i(U_i - U_{i-1}) + \ldots$$

est convergente. D'autre part, la série :

$$W_0 + \lambda W_1 + \ldots + \lambda^i W_i + \ldots$$

est elle-même uniformément convergente. On conclut de là :

$$\lim W = \sum \lambda^i (U_i - U_{i-1}),$$

en vertu d'un théorème bien connu de la théorie des séries.

Tout ce qui précède suppose :

$$|\lambda| < \frac{1}{\mu}.$$

Cela s'applique si λ est égal à 1. Dans ce cas, la série :

$$\sum \lambda^i (U_i - U_{i-1})$$

se réduit à :

$$(U_0 - \Phi) + (U_1 - U_1) + (U_2 - U_1) + \ldots,$$

c'est-à-dire à la fonction donnée Φ changée de signe. On a donc :

$$\lim W = -\Phi,$$

quand le point x, y, z tend vers un point de S en restant à l'extérieur de cette surface.

Comme la fonction Φ est arbitraire, on voit que *le problème de Dirichlet, en ce qui concerne le domaine* T′ *extérieur à* S, *est complètement résolu.*

146. Faisons maintenant :

$$\lambda = -1.$$

Les mêmes raisonnements peuvent être répétés. On peut écrire :

$$\begin{aligned} W = (B + W_0) + (B\mu - W_1) + (B\mu^2 + W_2) + \ldots \\ + [B\mu^i + (-1)^i W_i] + \ldots \\ - \Sigma B\mu^i. \end{aligned}$$

Le théorème de Harnack montre encore que W est une fonction harmonique.

Cette fois, on trouve que :

$$\lim W = \Phi,$$

quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de S en restant toujours intérieur à T.

Le problème de Dirichlet, en ce qui concerne le domaine T *intérieur à* S, *est donc complètement résolu.*

En définitive, le principe de Dirichlet est établi, dans le cas où la constante C est nulle.

147. Deuxième cas. — $C \neq 0$.

Occupons-nous d'abord du problème intérieur.

Prenons la fonction donnée Φ. Sa connaissance conduit à la

connaissance de la constante C qui, par hypothèse, est ici différente de zéro.

Changeons maintenant Φ en $\Phi - C$, et refaisons les mêmes calculs. Il est clair que U_0 devient :

$$\int_S (\Phi - C)\, d\sigma'$$

c'est-à-dire :

$$U_0 - \int_S C d\sigma',$$

ou enfin :

$$U_0 - C$$

De même U_1 devient $U_1 - C$ et, en général, U_i devient $U_i - C$.

Dans les mêmes conditions, les quantités :

$$G_i \quad \text{et} \quad H_i$$

deviennent :

$$G_i - C \text{ et } H_i - C.$$

Alors la nouvelle constante C se déduit de la première par soustraction de C : elle est nulle.

On est ainsi ramené au cas où C est nul. On peut donc résoudre le problème de Dirichlet, en se donnant les valeurs de $\Phi - C$ pour valeurs de la fonction harmonique cherchée sur le bord du domaine T.

Soit W la solution obtenue. C'est une fonction harmonique en tout point du domaine envisagé. De plus :

$$\lim W = \Phi - C,$$

quand le point x, y, z tend vers S en restant à l'intérieur de T.

Posons alors :

$$V = W + C,$$

Il est clair que V est encore une fonction harmonique dans T. Mais, cette fois, on a :

$$\lim V = \Phi.$$

quand le point x, y, z vient se placer sur S.

D'autre part, W est le potentiel en un point intérieur à T d'une double couche portée par S. Or la constante C peut aussi être

regardée comme le potentiel en un point de T d'une double couche homogène portée par S. Donc W + C est encore un potentiel de double couche.

Le problème intérieur de Dirichlet est donc résolu dans tous les cas au moyen d'une double couche portée par S.

148. Passons maintenant au problème extérieur. Nous allons voir que la même conclusion ne subsiste plus : si C est différent de zéro, on ne peut plus résoudre le problème en question en se servant seulement d'une double couche portée par S.

Tout d'abord, il est clair que l'on ne peut plus employer l'artifice qui a conduit à trouver la solution générale du problème intérieur. En effet, il est toujours possible de former la fonction harmonique W qui tend vers $\Phi - C$ quand on s'approche indéfiniment de S par l'extérieur. La fonction W + C vérifie bien encore l'équation de Laplace. Mais ce n'est pas une fonction harmonique, car elle n'est pas régulière à l'infini, W l'étant et C étant une constante. De plus, il est exact que W est un potentiel de double couche ; mais la constante C ne peut pas être regardée ici comme le potentiel en un point extérieur d'une double couche homogène portée par S, car un tel potentiel est nul dans tout l'espace extérieur à S.

D'ailleurs nous avons vu (§ **135**) qu'il existait une condition nécessaire pour que le problème extérieur de Dirichlet soit résoluble par le potentiel newtonien d'une double couche de matière attirante répandue sur S. Or :

$$C = 0$$

est une condition suffisante. C'est alors la condition nécessaire et suffisante en question.

Voyons donc comment la méthode de Neumann permet de résoudre le problème extérieur de Dirichlet quand la constante C n'est pas nulle.

149. Soit W un potentiel de double couche.

Prenons un point M à l'extérieur de S (fig. 87) et un point O à l'intérieur. Puis posons :

$$OM = \rho.$$

Il n'est pas possible de trouver une double couche portée par S dont le potentiel W coïncide avec la fonction $\frac{1}{\rho}$ à l'extérieur de S. En effet, W étant un potentiel de double couche, on aurait :

$$\lim_{\rho=\infty} \rho W = 0,$$

et, d'autre part, W coïncidant avec $\frac{1}{\rho}$, on devrait avoir :

$$\lim_{\rho=\infty} \rho W = 1,$$

ce qui est contradictoire.

Désignons par Φ' l'ensemble des valeurs de $-\frac{1}{\rho}$ sur S. Il existe une fonction W' harmonique dans T' et se réduisant à $-\Phi'$ sur S : c'est précisément la fonction $\frac{1}{\rho}$. Cette fonction, nous venons de le voir, ne peut être regardée comme un potentiel de double couche. Mais il est certain que c'est le potentiel d'une simple couche portée par S : cette simple couche est d'ailleurs la couche équivalente provenant du balayage d'une masse $+1$ placée en O.

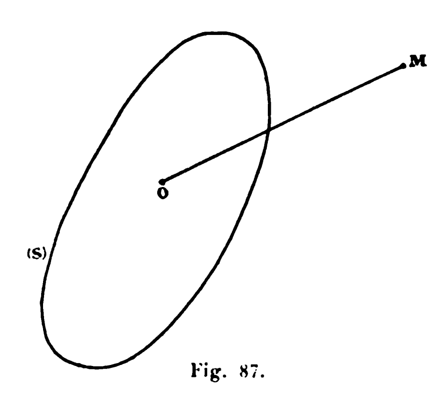


Fig. 87.

Cela posé, appelons C' la constante que l'on peut former avec Φ' comme on a formé la constante C avec Φ. On a évidemment :

$$C' \neq 0,$$

sans quoi W' serait un potentiel de double couche.

Posons :

$$\Phi'' = \Phi + \alpha\Phi'$$

α étant une constante laissée indéterminée pour le moment. A la fonction Φ'' définie sur S est attachée une nouvelle constante C'' qui est liée aux précédentes par la relation :

$$C'' = C + \alpha C'$$

Prenons :

$$C + \alpha C' = 0$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = -\frac{C}{C'}.$$

La valeur de α est bien déterminée, puisque :

$$C' \neq 0.$$

Ayant ainsi choisi α, on a :

$$C'' = 0.$$

On peut alors résoudre le problème extérieur de Dirichlet au moyen d'une double couche dont le potentiel W prend les valeurs $-\Phi''$ sur S.

Posons maintenant :

$$V = W - \frac{\alpha}{\rho}.$$

Il est clair que l'on a :

$$\Delta V = 0$$

à l'extérieur de S. La fonction V est harmonique dans T' ; elle est régulière à l'infini ; enfin, quand on approche indéfiniment de S par l'extérieur, on a :

$$\lim V = -\Phi'' + \alpha\Phi' = -\Phi.$$

Donc la fonction V résout le problème proposé.

Il est manifeste que V peut être regardé comme la somme de deux potentiels, l'un dû à une simple couche, l'autre dû à une double couche, portées toutes deux par la surface S.

C. Q. F. D.

150. Signification de la constante C.

Voyons ce que représente cette constante C qui a joué un rôle si important dans les considérations précédentes.

Imaginons une certaine quantité d'électricité répandue sur la surface S regardée comme conductrice. Supposons cette charge

en équilibre sur S. Soit alors P le potentiel correspondant. On sait que P est une fonction harmonique à l'extérieur de S. Quant à sa valeur sur S et à l'intérieur de S, elle est constante : nous l'appellerons P_0. La densité de la couche électrique considérée est, en chaque point de S, donnée par l'expression :

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{dP}{dn}.$$

Reprenons maintenant les fonctions W_i des paragraphes précédents et continuons à employer les mêmes notations. On a :

$$\frac{dW_i}{dn}=\frac{dV_i}{dn}=\frac{dV'_i}{dn},$$

d'après les propriétés des doubles couches établies au chapitre VI.

Remarquons alors que l'on a :

$$\int_{(S)} P_0\frac{dV_i}{dn}\,d\omega'=\int_{(S)} P\frac{dV'_i}{dn}\,d\omega'.$$

Appliquons la formule de Green, en nous rappelant que P et W_i sont des fonctions continues et que l'on a :

$$\Delta P=0,\quad \Delta W_i=0.$$

On trouve :

$$\int_{(S)} P_0\frac{dV_i}{dn}\,d\omega'=\int_{(S)} V_i\frac{dP_0}{dn}\,d\omega'$$

en considérant le domaine T intérieur à S, et :

$$\int_{(S)} P\frac{dV'_i}{dn}\,d\omega'=\int_{(S)} V'_i\frac{dP}{dn}\,d\omega'$$

en considérant le domaine T' extérieur à S. On conclut de là :

$$\int_{(S)} V_i\frac{dP_0}{dn}\,d\omega'=\int_{(S)} V'_i\frac{dP}{dn}\,d\omega'.$$

Mais :

$$\frac{dP_0}{dn}=0,$$

puisque P_0 est une constante. Donc :

$$\int_{(S)} V'_i \frac{dP}{dn} d\omega' = 0.$$

Or :

$$V'_i = U_i - U_{i-1}.$$

Par suite :

$$\int_{(S)} U_i \frac{dP}{dn} d\omega' = \int_{(S)} U_{i-1} \frac{dP}{dn} d\omega'.$$

Cette égalité montre que, si l'on pose :

$$J_i = \int_{(S)} U_i \frac{dP}{dn} d\omega',$$

on a :

$$J_i = J_{i-1} = J_{i-2} = \ldots..$$

D'où, finalement :

$$\int_{(S)} U_i \frac{dP}{dn} d\omega' = \int_{(S)} \Phi \frac{dP}{dn} d\omega'.$$

Faisons croître i indéfiniment. On a :

$$\lim G_i = C$$
$$\lim H_i = C$$

et, comme :

$$G_i \geqq U_i \geqq H_i,$$

on peut conclure de là :

$$\lim U_i = C$$

Donc :

$$C \int_{(S)} \frac{dP}{dn} d\omega' = \int_{(S)} \Phi \frac{dP}{dn} d\omega'.$$

Soit alors M la masse totale de la couche électrique dont le potentiel est P. La densité de cette couche est :

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{dP}{dn}.$$

D'où :

$$\int_{(S)} \frac{dP}{dn} d\omega' = -4\pi M$$

Finalement :

$$C = -\frac{\int_{(S)} \Phi \frac{dP}{dn} d\omega'}{4\pi M}.$$

Telle est la valeur de la constante C.

151. Emploi des potentiels de simple couche dans la méthode de Neumann. — Cherchons à transformer la solution obtenue par la méthode de Neumann pour le problème de Dirichlet tant intérieur qu'extérieur. Nous allons montrer qu'on peut considérer des simples couches au lieu des doubles couches envisagées partout jusqu'à présent. Nous supposerons pour cela que l'on a :

$$C = 0.$$

Prenons d'abord le cas du problème extérieur.

Appelons x, y, z les coordonnées du point courant M situé dans le domaine T' et x', y', z' celles d'un point M' de S placé au centre de gravité de l'élément $d\omega'$. Les autres notations adoptées sont d'ailleurs les mêmes que dans les paragraphes précédents.

On a :

$$W_i + W_{i-1} = \int_{(S)} (U_{i-1} + U_{i-2}) \, d\theta'.$$

Mais on peut écrire :

$$d\theta' = -\frac{d\sigma'}{2\pi}$$

et :

$$d\sigma' = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega',$$

en désignant par r la distance MM' et par $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ la dérivée de $\frac{1}{r}$ prise dans la direction de la normale extérieure à S par rapport

à x, y, z regardés comme variables pendant que x', y', z' sont regardés comme constants.

On conclut de là :

$$W_i + W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S)} (U_{i-1} + U_{i-2}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Or :

$$U_{i-1} + U_{i-2} = V_{i-1}.$$

D'où :

$$W_i + W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S)} V_{i-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Servons-nous de la formule de Green. Regardons pour cela $\frac{1}{r}$ et W_{i-1} comme des fonctions de x', y', z' renfermant les paramètres x, y, z. Dans ces conditions, $\frac{1}{r}$ dépend à la fois de x, y, z et de x', y', z et l'on a :

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0\ldots \text{ dans T}$$

en posant :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Quant à W_{i-1}, dont la valeur sur S est V_{i-1} quand on reste à l'intérieur de T, c'est une fonction de x', y', z' vérifiant aussi la relation :

$$\Delta W_{i-1} = 0\ldots \text{ dans T}.$$

On a alors :

$$\int_{(S)} V_{i-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} d\omega' = \int_{(S)} \frac{1}{r} \frac{dV_{i-1}}{dn'} d\omega',$$

en désignant par :

$$\frac{d}{dn'},$$

les dérivées suivant la normale prises par rapport à x, y, z. Mais pour $\frac{1}{r}$ et W_{i-1}, on a :

$$\frac{d}{dn} = -\frac{d}{dn}.$$

Donc on peut écrire :

$$\int_S V_{i-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega = \int_S \frac{1}{r} \frac{dV_{i-1}}{dn} d\omega'.$$

D'où :

$$W + W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\frac{dV_{i-1}}{dn}}{r} d\omega'.$$

On voit par là que $W_i + W_{i-1}$ est le potentiel d'une simple couche répandue sur S avec la densité :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{dV_{i-1}}{dn}$$

en chaque point.

Tout cela est valable pour l'extérieur de S. Voyons ce qui se passe quand le point x, y, z est situé à l'intérieur de S.

Considérons alors la différence :

$$W_i - W_{i-1}.$$

On a :

$$W_i - W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_S (U_{i-1} - U_{i-2}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Mais :

$$U_{i-1} - U_{i-2} = V'_{i-1}.$$

D'où :

$$W_i - W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_S V'_{i-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega'.$$

Appliquons encore la formule de Green de la même façon que

plus haut, c'est-à-dire en regardant x', y', z' comme les coordonnées courantes, mais, cette fois, prenons comme domaine d'intégration l'espace extérieur à S. On a :

$$\int_{(S)} V'_{i-1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega' = \int_{(S)} \frac{\frac{dV'_{i-1}}{dn}}{r} d\omega'.$$

D'où :

$$W_i - W_{i-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\frac{dV'_{i-1}}{dn}}{r} d\omega'$$

On voit que $W_i - W_{i-1}$ est le potentiel d'une simple couche portée par S, la densité en chaque point étant :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{dV'_{i-1}}{dn}$$

152. Remarquons que l'on a :

$$\frac{dV_{i-1}}{dn} = \frac{dV'_{i-1}}{dn}$$

à cause des propriétés des potentiels de doubles couches. Donc :

$$W_i + W_{i-1}$$

et :

$$W_i - W_{i-1}$$

sont les valeurs d'un même potentiel de simple couche prises en un point extérieur à S pour $W_i + W_{i-1}$ et en un point intérieur pour $W_i - W_{i-1}$.

Appelons T_i ce potentiel et considérons les séries qui donnent la solution du problème de Dirichlet tant intérieur qu'extérieur.

Dans le cas du problème intérieur, on doit faire :

$$\lambda = -1.$$

D'où

$$W = (W_0 - W_1) + (W_2 - W_3) + \dots + (W_{i-1} - W_i) + \dots$$

c'est-à-dire :

$$W = -T_1 - T_2 - \dots - T_i - \dots$$

Dans le cas du problème extérieur, on doit faire :

$$\lambda = +1.$$

D'où :

$$W = (W_0 + W_1) + (W_2 + W_3) + \dots + (W_{i-1} + W_i) + \dots$$

c'est-à-dire :

$$W = T_1 + T_2 + \dots + T_i + \dots$$

Dans les deux cas, W se présente comme un potentiel de simple couche. Pour les deux simples couches envisagées, la densité est la même, au signe près.

Poussons un peu plus loin l'étude des fonctions T_i.

153. Propriétés des fonctions T_i.

Considérons la fonction T_i. Cette fonction est le potentiel d'une simple couche de matière attirante répandue sur S. Désignons par T_i la valeur de cette fonction en un point voisin de S et intérieur à S. Désignons de même par T'_i la valeur de cette fonction en un point voisin de S et extérieur à S

En un point M_0 de S, on a :

$$T_i = T'_i.$$

Mais on n'a pas :

$$\frac{dT_i}{dn} = \frac{dT'_i}{dn}.$$

On doit écrire :

$$\frac{dT_i}{dn} - \frac{dT'_i}{dn} = 2\frac{dW_{i-1}}{dn}$$

en vertu des propriétés bien connues des potentiels de simple couche.

En un point situé à l'extérieur de S, la définition même des fonctions T_i montre que l'on a :

$$T_i = W_i + W_{i-1}.$$

D'où, en M_0 :

$$\frac{dT_i}{dn} = \frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_{i-1}}{dn}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dT'_i}{dn} = \frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_{i-1}}{dn}$$

puisque :

$$\frac{dV'_i}{dn} = \frac{dV_i}{dn}$$

$$\frac{dV'_{i-1}}{dn} = \frac{dV_{i-1}}{dn}$$

d'après les théorèmes de la théorie des doubles couches.

En un point situé à l'intérieur de S, on a de même :

$$T_i = W_i - W_{i-1}.$$

D'où, en M_0 :

$$\frac{dT_i}{dn} = \frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_{i-1}}{dn}.$$

On déduit de là par addition :

$$\frac{dT'_i}{dn} + \frac{dT_i}{dn} = 2\frac{dV_i}{dn}.$$

154. Soit M_0 un point de S. Prenons un point M'_0 très voisin de M_0 et extérieur à S (fig. 88) et un point M''_0 très voisin de M_0 et intérieur à S.

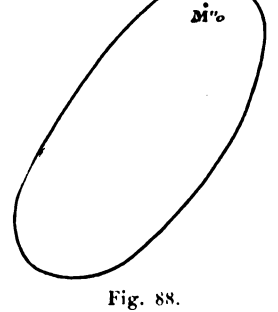


Fig. 88.

Je dis que l'on peut former de proche en proche les fonctions T_i. En effet, supposons que T_{i-1} soit connu. La composante normale à S de l'attraction correspondant au potentiel T_{i-1} est :

$$\frac{dT'_{i-1}}{dn} \dots \text{ en } M'_0$$

$$\frac{dT_{i-1}}{dn} \dots \text{ en } M''_0.$$

Quant à sa valeur au point M_0 lui-même, c'est :

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dT'_{i-1}}{dn} + \frac{dT_{i-1}}{dn}\right),$$

c'est-à-dire :

$$-\frac{dW_{i-1}}{dn}.$$

C'est précisément, au facteur $-\frac{1}{2\pi}$ près, la densité de la simple couche à laquelle est dû le potentiel T_i. Donc quand on connaît T_{i-1}, on peut calculer T_i. D'ailleurs on a :

$$T_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\frac{dW_1}{dn}}{r}\,d\omega$$

et :

$$W_1 = \int \Phi\, d\sigma.$$

Par conséquent, Φ étant donné, on peut trouver W_1 ; on en déduit $\frac{dW_1}{dn}$; d'où T_1 et, de proche en proche, toutes les fonctions T_i.

Tout ce qui précède suppose, bien entendu, que l'on ait :

$$C = 0.$$

Si cette condition est remplie, il est clair que T_i tend vers zéro quand i augmente indéfiniment, puisque l'on a :

$$T_i = W_i - W_{i-1}$$

à l'intérieur de S et :

$$T_i = W'_i - W'_{i-1}$$

à l'extérieur et que les séries :

$$\sum (W_i - W_{i-1})$$

$$\sum (W'_i - W'_{i-1})$$

sont convergentes. De même :

$$\frac{dV_i}{dn},$$

qui est la densité de la couche superficielle étudiée, tend vers zéro puisque les séries :

$$\sum \frac{\partial W_i}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial W_i}{\partial y}, \quad \sum \frac{\partial W_i}{\partial z}$$

sont convergentes. D'ailleurs, on a :

$$\frac{dT'_{i+1}}{dn} - \frac{dT_{i+1}}{dn} = 2\frac{dV_i}{dn},$$

Mais, puisque T_{i-1} tend vers zéro en tout point de l'espace, il en est de même de :

$$\frac{dT'_{i+1}}{dn}, \quad \frac{dT_{i+1}}{dn}$$

Donc $\frac{dV_i}{dn}$ doit bien tendre aussi vers zéro.

155. Revenons à l'opération qui permet de déduire le potentiel T_i du potentiel T_{i-1}. Je dis que cette opération consiste uniquement dans un changement de distribution d'une masse totale invariable.

En effet, posons :

$$T = \int_{S_i} \frac{\mu'}{r} d\omega'.$$

Calculons Θ par la formule :

$$\Theta = \int_{S_i} \frac{\mu''}{r} d\omega'$$

en prenant :

$$\mu'' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dT'}{dn} + \frac{dT}{dn}\right).$$

On voit que Θ se déduit de T comme T_i de T_{i-1}.

Or on a :

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn}\right) = \mu'.$$

D'où :

$$\mu'' = -\frac{1}{2\pi}\frac{dT}{dn} + \mu'.$$

Mais :

$$\int_S \frac{dT}{dn} d\omega = 0.$$

Donc :

$$\int_S \mu_1 \, d\omega' = \int_S \mu \, d\omega'.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas étudié plus haut, la masse totale de la couche don le potentiel est T a pour valeur :

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{dV_{i-1}}{dn} d\omega'.$$

Or :

$$\int_S \frac{dV_{i-1}}{dn} d\omega = \int_T \Delta V_{i-1} \, d\tau = 0.$$

Donc la masse totale M est nulle pour toutes les valeurs de l'indice i.

156. Je dis que l'on peut prendre pour T_1 le potentiel d'une distribution superficielle quelconque, pourvu que la masse totale de la couche ainsi considérée soit nulle, et calculer ensuite la succession des fonctions T_i de proche en proche par le procédé indiqué. On est toujours assuré que T_i tend vers zéro quand i augmente indéfiniment.

Pour établir cette proposition, il faut d'abord résoudre un problème préliminaire. C'est ce que je vais faire, et, pour cela, je me servirai des résultats obtenus à propos du problème de Dirichlet par la méthode de Neumann exposée ci-dessous.

157. Résolution d'un problème analogue à celui de Dirichlet.

Soit une surface fermée S délimitant un domaine intérieur T et un domaine extérieur T'. Nous ferons sur S les mêmes hypothèses qu'à propos de la méthode de Neumann. Enfin désignons par Φ une fonction continue donnée sur S.

Proposons-nous de construire une fonction U telle que l'on ait :

$$\Delta U = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{dans T.}$$

$$\frac{dU}{dn} = \Phi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{sur S.}$$

Il est clair que, si U est une solution, U+C en est une autre, C étant une constante arbitraire.

D'abord, si U est une fonction répondant à la question, on a :

$$\int_{(S)} \frac{dU}{dn} d\omega' = \int_{(T)} \Delta U d\tau' = 0.$$

D'où :

$$\int_{(S)} \Phi d\omega' = 0.$$

C'est là une condition évidemment nécessaire pour que le problème soit possible. Nous la supposerons remplie.

Imaginons une simple couche de matière attirante répandue sur S, la densité en chaque point étant :

$$\frac{\Phi}{4\pi}.$$

Soit T le potentiel de cette simple couche. Désignons par T la valeur de ce potentiel en un point intérieur à S et par T' sa valeur en un point extérieur. On a, en tout point de la surface S :

$$T = T'$$

et :

$$\frac{dT}{dn} - \frac{dT'}{dn} = \Phi.$$

Soit maintenant W le potentiel d'une double couche portée par S. Appelons W et W' ses valeurs respectivement en un point intérieur à S et un point extérieur à S. On a :

$$W \neq W'$$

et :

$$\frac{dW}{dn} = \frac{dW'}{dn}$$

en tout point de S. Admettons en outre que l'on ait pu choisir la densité de la double couche de façon que l'on ait encore sur S :

$$W' = -T'.$$

Posons alors :

$$U = W + T$$
$$U' = W' + T'.$$

On a :

$$\frac{dU}{dn} - \frac{dU'}{dn} = \Phi$$

sur S. Mais, dans les mêmes conditions, il est visible que :

$$U' = 0.$$

Or U′ est une fonction harmonique à l'extérieur de S et régulière à l'infini. D'où :

$$U' \equiv 0$$

à l'extérieur de S. Alors :

$$\frac{dU'}{dn} = 0.$$

Par conséquent :

$$\frac{dU}{dn} = \Phi.$$

D'autre part :

$$\Delta U = 0$$

à l'intérieur de S. Finalement la fonction U résout le problème proposé.

158. Il reste un point encore à examiner. Peut-on déterminer un potentiel de double couche W′ par les conditions suivantes :

$$\Delta W' = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{à l'extérieur de S.}$$
$$W' = T' \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{sur S.}$$

Nous avons vu qu'il n'en était rien. Dans nos études sur la méthode de Neumann, nous avons reconnu qu'une condition était requise : une certaine constante C doit être nulle.

D'autre part, nous avons découvert une condition nécessaire pour la possibilité du problème actuel :

$$\int_S \Phi d\omega' = 0$$

Comme :

$$C = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante, c'est que les deux conditions :

$$C = 0, \quad \int_{(S)} \Phi d\omega' = 0,$$

sont équivalentes.

Donc, d'après notre hypothèse du paragraphe précédent, on peut certainement calculer W' et, par conséquent, notre problème est bien résolu.

159. Proposons-nous, pour terminer, de résoudre le même problème dans le cas où le domaine envisagé est constitué par la partie de l'espace extérieur à S.

Nous devons avoir :

$$\Delta U' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{à l'extérieur de S.}$$

$$\frac{dU'}{dn} = -\Phi \quad . \quad . \quad \text{sur S.}$$

Formons une simple couche portée par S et ayant pour densité en chaque point $\frac{\Phi}{4\pi}$. Soit T son potentiel. On a toujours :

$$T = T'$$

$$\frac{dT}{dn} = \frac{dT'}{dn} + \Phi$$

sur S.

D'autre part, on peut, dans tous les cas, trouver une double couche portée par S dont le potentiel W, défini et harmonique en tout point intérieur à S, tende vers $-$ T quand on se rapproche indéfiniment de S par l'intérieur.

Posons alors :

$$U = W + T$$

$$U' = W' + T'.$$

Sur S, on a :

$$U = 0.$$

Donc :

$$U \equiv 0$$

à l'intérieur de S. Par suite :

$$\frac{dU'}{dn} = 0$$

Mais il est clair que :

$$\frac{dU'}{dn} - \frac{dU'}{dn} = \Phi.$$

On en conclut :

$$\frac{dU'}{dn} = -\Phi.$$

D'autre part, on a :

$$\Delta U' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{à l'extérieur de S.}$$

Le problème est donc résolu.

Ici il n'existe aucune condition de possibilité.

160. Revenons maintenant aux fonctions T_i considérées plus haut.

Nous voulons montrer que T_1 peut être regardé comme le potentiel d'une distribution quelconque dont la masse totale est nulle.

En effet on a, en reprenant les notations du paragraphe **154** :

$$W_0 = \int_S \Phi d\mathfrak{H}'$$

$$T_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{S'} \frac{\frac{dW_0}{dn}}{r} d\omega'.$$

D'après ce qui précède, nous pouvons choisir W_0 de façon que :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{dW_0}{dn} = \mu',$$

μ' étant une fonction arbitraire assujettie seulement à la condition :

$$\int_{S'} \mu' d\omega' = 0.$$

La fonction initiale W_0 n'est pas alors un potentiel de double

couche. Mais il est manifeste que cela ne change rien à nos conclusions au sujet des fonctions T_i.

C. Q. F. D.

161. Considérons en dernier lieu le cas où l'on part d'un potentiel T_1 correspondant à une simple couche dont la masse totale M n'est pas nulle.

On peut encore former la suite des fonctions T_i.

Cela posé, supposons la masse M répandue sur S à la façon d'une masse égale d'électricité en équilibre. Soit P le potentiel dans ce dernier cas. On a :

$$\Delta P = 0. \quad . \quad . \quad . \quad \text{à l'extérieur de S.}$$
$$P = C^{te} \quad . \quad . \quad . \quad \text{à l'intérieur de S et sur S.}$$

La densité en chaque point est :

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{dP'}{dn}.$$

D'où :

$$P = -\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\frac{dP'}{dn}}{r}\, d\omega'.$$

Il est clair que l'opération qui fait passer de T_{i-1} à T_i laisse P invariable, puisque :

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dP'}{dn}+\frac{dP}{dn}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{dP'}{dn},$$

à cause de la constance de P à l'intérieur de S.

Il est manifeste d'après cela que les fonctions :

$$T_i - P$$

se déduisent les unes des autres d'après la même loi que les fonctions T_i.

Chaque fonction :

$$T_i - P$$

est le potentiel d'une simple couche dont évidemment la masse totale est nulle.

On conclut de là que :

$$T_i - P$$

tend vers zéro quand i augmente indéfiniment. En d'autres termes, si la masse totale qui sert à former le potentiel n'est pas nulle, T ne tend plus vers zéro, mais vers P, c'est-à-dire vers le potentiel de la couche électrique en équilibre sur la surface S.

Dans les mêmes conditions, la densité en chaque point de la matière attirante dont le potentiel est T_i tend vers la densité de la couche électrique de masse M qui serait en équilibre sur la surface donnée S.

C'est là le principe de la *méthode de M. Robin* pour déterminer une simple couche sans action sur les points intérieurs à la surface fermée qui la porte. On dit quelquefois que cette méthode permet de trouver la *distribution naturelle* de l'électricité sur S.

CHAPITRE IX

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE NEUMANN AU CAS DES DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES. LES FONCTIONS FONDAMENTALES

162. Énoncé. — Le chapitre VIII contient un exposé de la méthode imaginée par Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet tant intérieur qu'extérieur. Nous savons l'importance de cette méthode, non pas peut-être pour établir le principe de Dirichlet — puisque la méthode du balayage suffit à cet égard, — mais pour manifester l'identité des fonctions harmoniques et des potentiels newtoniens. Il est donc intéressant de chercher à donner à la méthode de Neumann toute la généralité possible. C'est ce que nous allons faire.

La preuve de la convergence des séries considérées par Neumann n'a été faite jusqu'ici que dans l'hypothèse où la surface donnée S est convexe. Nous allons montrer que cette hypothèse n'est pas indispensable.

Le développement complet des considérations qui vont suivre serait trop long pour trouver place dans ce cours. On pourra le chercher dans un mémoire inséré aux *Acta Mathematica* en 1896. Nous nous contenterons ici d'un aperçu qui fasse entrevoir dans quel sens il faut chercher une extension de la méthode de Neumann lorsqu'on a affaire à une surface S qui n'est pas convexe.

163. Hypothèses. — Nous considérons toujours une surface fermée S délimitant un domaine intérieur T et un domaine extérieur T′.

Cela posé, voici quelles hypothèses nous ferons désormais sur la surface S.

D'abord nous supposerons que cette surface possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux déterminés. Il est facile de voir avec précision ce que nous admettons ainsi. Plaçons l'origine des coordonnées en un point de la surface ; choisissons la normale en ce point comme axe OZ et le plan tangent correspondant comme plan XOY ; plaçons-nous d'ailleurs en coordonnées rectangulaires. Soit alors :

$$z' = \varphi(x', y')$$

l'équation d'une petite portion de la surface autour de l'origine. Notre hypothèse est que les fonctions :

$$p_1 = \frac{\partial z'}{\partial x'}, \quad q_1 = \frac{\partial z'}{\partial y'}$$

et :

$$r_1 = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}, \quad s_1 = \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'}, \quad t_1 = \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}$$

sont finies et continues dans le voisinage de l'origine. Celle-ci du reste doit être un point quelconque de la surface.

Nous supposerons en outre que le domaine T limité par la surface S est simplement connexe. Cela signifie que toute surface fermée contenue dans T peut, par une déformation continue qui ne lui fait jamais rencontrer la frontière du domaine envisagé, se réduire à un point de ce domaine.

Enfin nous ne considérerons, comme fonction Φ donnée sur S, que des fonctions possédant des dérivées partielles de tous les ordres finies et continues.

Cela étant, nous aurons à nous appuyer sur le principe de Dirichlet. Nous sommes donc obligés de le regarder comme établi déjà indépendamment de la méthode de Neumann, par exemple par la méthode du balayage. Dans ces conditions, notre but est seulement d'étudier la convergence des séries de Neumann.

164. Rappel de certaines notations. — Soit W le potentiel newtonien d'une double couche portée par S. Si le point courant x, y, z tend vers un point fixe x', y', z' de S en restant toujours à

l'extérieur de S, W a une limite que nous appelons V'. De même si x, y, z tend vers x', y', z' en restant toujours à l'intérieur de S, W a une limite V. Enfin la valeur de W quand x, y, z coïncide avec x', y', z' est bien déterminée ; c'est :

$$U = \frac{V + V'}{2}.$$

On sait que V n'est pas égal à V'.

Cela posé, la méthode de Neumann consiste à construire une double couche satisfaisant en tout point de S à la relation :

$$V - V' = \lambda (V + V') + 2\Phi,$$

λ étant un paramètre arbitraire et Φ une fonction donnée des deux coordonnées qui fixent la position d'un point sur S.

Posons :

$$W = \sum \lambda^i W_i$$

$$V = \sum \lambda^i V_i$$

$$V' = \sum \lambda^i V'_i$$

$$U = \sum \lambda^i U_i.$$

Chaque fonction W_i est le potentiel d'une double couche portée par S et l'on a :

$$V_i - V'_i = V_{i-1} + V'_{i-1} = 2U_{i-1}.$$

On peut donc construire les fonctions W_i de proche en proche. Il reste alors à étudier la convergence des séries précédentes.

Il n'est pas nécessaire d'établir cette convergence pour toutes les valeurs de λ. On sait en effet que la résolution des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur nécessite seulement la considération des deux valeurs :

$$\lambda = +1$$

et :

$$\lambda = -1.$$

Finalement, nous pouvons nous borner à examiner le cas où λ reste compris entre $-\lambda_0$ et $+\lambda_0$, λ_0 étant un nombre positif quelconque supérieur à l'unité.

Si la surface S est convexe, le problème a été résolu. Nous allons montrer qu'il peut l'être encore avec les hypothèses que nous avons faites. Cela peut sembler paradoxal, car les inégalités qui ont joué un rôle essentiel au chapitre VIII ne sont plus vraies quand la surface S n'est plus convexe. Néanmoins la méthode de Neumann réussit encore, et de plus il est probable qu'elle s'applique même dans le cas le plus général.

165. Les intégrales J_m. — Considérons l'intégrale :

$$J_{ik} = \int_T \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial W_k}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \frac{\partial W_k}{\partial z} \right) d\tau$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine T intérieur à S.

Considérons de même l'intégrale :

$$J'_{ik} = \int_{T'} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial W_k}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \frac{\partial W_k}{\partial z} \right) d\tau$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine T′ extérieur à S.

En vertu des hypothèses faites, chacune de ces intégrales a un sens bien défini.

Appliquons la formule de Green pour le domaine T en ce qui concerne J_{ik} et pour le domaine T′ en ce qui concerne J'_{ik}. On a :

$$J_{ik} = \int_S V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega$$

et :

$$J'_{ik} = -\int_S V'_i \frac{dV_k}{dn} d\omega$$

en remarquant que :

$$\frac{dV_k}{dn} = \frac{dV'_k}{dn},$$

puisque W_k est un potentiel de double couche.

Dans les formules précédentes, $d\omega$ désigne un élément de S

et $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise suivant la normale à S dirigée vers l'extérieur. De plus, il faut remarquer que l'on doit écrire :

$$\Delta W_i = 0, \quad \Delta W_k = 0,$$

tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S, puisque W_i et W_k sont deux potentiels newtoniens. Pour la même raison, ces deux fonctions sont régulières à l'infini.

On peut encore écrire :

$$J_{i,k} = \int_{(S)} V_k \frac{dV_i}{dn} d\omega$$

et :

$$J'_{i,k} = -\int_{(S)} V'_k \frac{dV_i}{dn} d\omega.$$

D'où :

$$J_{i,k} = J_{k,i}$$
$$J'_{i,k} = J'_{k,i}.$$

C'était d'ailleurs évident par définition même de $J_{i,k}$ et de $J'_{i,k}$.

166. Considérons maintenant l'égalité :

$$V_i - V'_i = V_{i-1} + V'_{i-1}$$

Multiplions-en les deux membres par :

$$\frac{dV_k}{dn} d\omega$$

et intégrons en prenant la surface S pour champ d'intégration. On obtient la relation :

(1) $$J_{i,k} + J'_{i,k} = J_{i-1,k} - J'_{i-1,k}.$$

On déduit de là, par permutation des indices :

(2) $$J_{i,k} + J'_{i,k} = J_{k,i-1} - J'_{k,i-1}.$$

Mais, si l'on applique la relation (1) au cas où les indices ont les valeurs :

$$k+1 \text{ et } i-1,$$

on trouve :

$$(3) \qquad J_{k+1,\,i-1} + J'_{k+1,\,i-1} = J_{k,i-1} - J'_{k,i-1}.$$

En comparant les formules (2) et (3), on voit que :

$$J_{i,k} + J'_{i,k} = J_{k+1,\,i-1} + J'_{k+1,\,i-1}$$

ou bien :

$$J_{i,k} + J'_{i,k} = J_{i-1,\,k+1} + J'_{i-1,\,k+1}$$

en permutant les indices comme on a le droit de le faire.

D'autre part :

$$J_{i,k} - J'_{i,k} = J_{i+1,\,k} + J'_{i+1,\,k}.$$

D'où :

$$J_{i+1,\,k-1} - J'_{i+1,\,k-1} = J_{i+2,\,k-1} + J'_{i+2,\,k-1}.$$

Mais :

$$J_{i+1,\,k} + J'_{i+1,\,k} = J_{i+2,\,k-1} + J'_{i+2,\,k-1}.$$

Donc :

$$J_{i+1,\,k-1} - J'_{i+1,\,k-1} = J_{i,k} - J'_{i,k}.$$

Finalement, on peut écrire les deux relations :

$$J_{i,k} + J'_{i,k} = J_{i-1,\,k+1} + J'_{i-1,\,k+1}$$
$$J_{i,k} - J'_{i,k} = J_{i-1,\,k+1} - J'_{i-1,\,k+1}.$$

Ces relations sont valables pour toutes les valeurs des indices i et k.

On déduit de ce qui précède, par addition et soustraction :

$$J_{i,k} = J_{i-1,\,k+1}$$
$$J'_{i,k} = J'_{i-1,\,k+1}.$$

D'où : .

$$J_{i,k} = J_{i-1,\,k+1} = J_{i-2,\,k+2} = \dots = J_{0,\,k+i}$$
$$J'_{i,k} = J'_{i-1,\,k+1} = J'_{i-2,\,k+2} = \dots = J'_{0,\,k+i}.$$

On voit par là que les intégrales :

$$J_{i,k}, \quad J'_{i,k}$$

ne dépendent en réalité que de la somme i+k de leurs indices.

Nous pouvons donc représenter ces intégrales par la notation :

$$J_{i+k}, \quad J'_{i+k},$$

en ne faisant usage que d'un seul indice.

Posons :

$$i + k = m.$$

La relation fondamentale (1) devient alors :

$$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}.$$

167. Supposons m pair et posons :

$$m = 2p.$$

On peut alors écrire :

$$J'_{2p} = \int_{(T)} \left[\left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_p}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

et :

$$J'_{2p} = \int_{(T')} \left[\left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_p}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial W_p}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

la première intégrale étant étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine T intérieur à S et la seconde à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine T′ extérieur à S.

On a donc :

$$J_{2p} \geqq 0, \quad J'_{2p} \geqq 0.$$

Quant aux quantités :

$$J_{2p+1}, \quad J'_{2p+1},$$

on ne sait rien à priori sur leur signe.

Je me bornerai à signaler les inégalités suivantes :

$$|J_{2p+1}| < J_{2p}$$
$$|J'_{2p+1}| < J'_{2p}$$

que l'on peut facilement établir.

168. Il est facile de prévoir le rôle important que les quantités :

$$J_m, \quad J'_m,$$

sont appelées à jouer dans l'étude de la convergence des séries de Neumann.

Soit la série :

$$V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots + \lambda^i V_i + \ldots$$

Supposons-la convergente et même uniformément convergente. Multiplions-en alors les divers termes par :

$$\frac{dV_k}{dn} d\omega$$

et intégrons. On obtient la série :

$$J_k + \lambda J_{k-1} + \lambda^2 J_{k-2} + \ldots + \lambda^i J_{k+i} + \ldots$$

Cette série doit être aussi convergente. Donc le rayon de convergence de la série :

$$\sum \lambda^i V_i$$

est le même que celui de la série :

$$\sum \lambda^i J_{i-k},$$

ou du moins il ne peut le dépasser. Nous verrons que ces deux rayons de convergence sont égaux.

De même, les deux séries :

$$\sum \lambda^i V'_i$$

et :

$$\sum \lambda^i J'_{i-k}$$

ont le même cercle de convergence. Alors ce cercle de convergence est aussi celui de la série :

$$\sum \lambda^i W_i$$

tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S.

Ce sont ces aperçus qui ont amené à poser à priori et à étudier les intégrales J_m et J'_m.

169. Soit W le potentiel d'une double couche quelconque portée par S. Posons :

$$J = \int_{(S)} V \frac{dV}{dn} d\omega$$

et :

$$J' = -\int_{(S)} V' \frac{dV}{dn} d\omega$$

en remarquant que l'on a :

$$V \neq V'$$
$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn}$$

en tout point de S.

On peut écrire :

$$J = \int_{(T)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

et :

$$J' = \int_{(T')} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Ces nouvelles expressions de J et de J′ se déduisent des premières par application de la formule de Green.

Il est clair que l'on a :

$$J \geqq 0, \quad J' \geqq 0.$$

Si l'on prend :

$$W = W_p$$

on a :

$$J = J_{2p}$$

et :

$$J' = J'_{2p}.$$

170. Posons maintenant :

$$W = \alpha W_p + \beta W_{p+1},$$

α et β étant deux paramètres réels laissés indéterminés pour le moment et d'ailleurs indépendants l'un de l'autre.

Voyons ce que deviennent J et J′ dans notre nouvelle hypothèse. On a d'abord :

$$J = \alpha^2 \int_{(S)} V_p \frac{dV_p}{dn} d\omega + \alpha\beta \int_{(S)} \left(V_p \frac{dV_{p+1}}{dn} + V_{p+1} \frac{dV_p}{dn} \right) d\omega$$
$$+ \beta^2 \int_{(S)} V_{p+1} \frac{dV_{p+1}}{dn} d\omega$$

c'est-à-dire :

$$J = \alpha^2 J_{2p} + 2\alpha\beta J_{2p+1} + \beta^2 J_{2p+2}$$

si l'on remarque que :

$$\int_{(S)} V_p \frac{dV_{p+1}}{dn} d\omega = \int_{(S)} V_{p+1} \frac{dV_p}{dn} d\omega = J_{2p+1}.$$

De même :

$$J' = -\alpha^2 \int_{(S)} V'_p \frac{dV_p}{dn} d\omega - \alpha\beta \int_{(S)} \left(V'_p \frac{dV_{p+1}}{dn} + V'_{p+1} \frac{dV_p}{dn} \right) d\omega$$
$$- \beta^2 \int_{(S)} V'_{p+1} \frac{dV_{p+1}}{dn} d\omega.$$

D'où :

$$J' = \alpha^2 J'_{2p} + 2\alpha\beta J'_{2p+1} + \beta^2 J'_{2p+2}.$$

Finalement, on peut écrire :

$$J = \alpha^2 J_{2p} + 2\alpha\beta J_{2p+1} + \beta^2 J_{2p+2} \geqq 0$$
$$J' = \alpha^2 J'_{2p} + 2\alpha\beta J'_{2p+1} + \beta^2 J'_{2p+2} \geqq 0.$$

Il résulte de là que J et J′ sont des formes quadratiques définies positives des variables α et β. On a donc, en considérant leurs discriminants :

$$J^2_{2p+1} - J_{2p} J_{2p+2} < 0.$$
$$J'^2_{2p+1} - J'_{2p} J'_{2p+2} < 0.$$

Ces inégalités suffisent pour montrer que les séries :

$$\sum \lambda^i J_i$$

et :

$$\sum \lambda^i J'_i \, .$$

sont convergentes pourvu que l'on ait :

$$|\lambda|<1.$$

Mais on ne peut encore rien dire du cas où λ est égal à ± 1.

171. Le rapport $\frac{J}{J'}$. — Étudions le rapport $\frac{J}{J'}$ pour les différentes fonction W qui sont des potentiels de double couche.

Supposons que l'on ait :

$$J=0.$$

Alors c'est que W se réduit à une constante dans T. Dans ce cas, W est le potentiel d'une double couche homogène. Par suite, W se réduit à zéro dans T'. Donc :

$$J'=0.$$

Ainsi l'égalité :

$$J=0$$

entraîne l'égalité :

$$J'=0.$$

On verrait de même que l'égalité :

$$J'=0$$

entraîne l'égalité :

$$J=0.$$

Ainsi, dans le rapport :

$$\frac{J}{J'},$$

le numérateur et le dénominateur ne peuvent pas s'annuler l'un sans l'autre. *On conclut de là que ce rapport ne peut devenir ni nul ni infini.* Il a donc une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro.

Ce qui précède n'est qu'un aperçu dénué de toute rigueur, car le rapport en question, par exemple, pourrait, sans s'annuler, être susceptible de prendre des valeurs plus petites que toute quantité donnée, auquel cas sa limite inférieure serait zéro.

On peut, d'une façon pleinement rigoureuse, assigner à $\frac{J}{J'}$ une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro. Nous nous contenterons d'énoncer ce point, dont on trouvera la preuve complète dans le mémoire déjà cité des *Acta Mathematica*.

C'est dans la démonstration de la proposition précédente qu'intervient celle de nos hypothèses en vertu de laquelle le domaine T est simplement connexe. C'est également pour faire cette démonstration que l'on doit supposer le principe de Dirichlet établi indépendamment de la méthode de Neumann.

Quoi qu'il en soit, nous admettons désormais que l'on peut trouver un nombre μ satisfaisant aux inégalités :

$$0 < \mu < 1$$

et tel que :

$$\frac{1}{\mu} > \frac{J}{J'} > \mu$$

quelle que soit la fonction W choisie.

On a alors :

$$J - \mu J' > 0$$
$$J' - \mu J > 0.$$

Ces inégalités vont jouer un rôle essentiel dans nos raisonnements.

172. Posons :

$$W = \alpha W_p + \beta W_{p-1},$$

α et β étant comme ci-dessus deux paramètres arbitraires.

On a :

$$\begin{aligned} J - \mu J' &= \alpha^2 (J_{2p} - \mu J'_{2p}) \\ &+ 2\alpha\beta (J_{2p-1} - \mu J'_{2p-1}) \\ &+ \beta^2 (J_{2p-2} - \mu J'_{2p-2}). \end{aligned}$$

On voit que $J - \mu J'$ est une forme quadrique définie positive par rapport aux deux variables α et β. D'où :

$$(J_{2p-1} - \mu J'_{2p-1})^2 < (J_{2p} - \mu J'_{2p})(J_{2p-2} - \mu J'_{2p-2}).$$

inégalité qui est à rapprocher des inégalités semblables déjà obtenues.

Posons d'autre part :

$$W = \alpha W_p - \beta W_{p+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} J' - \mu J &= \alpha^2 (J'_{2p} - \mu J_{2p}) \\ &- 2\alpha\beta (J'_{2p+1} - \mu J_{2p+1}) \\ &+ \beta^2 (J'_{2p+2} - \mu J_{2p+2}). \end{aligned}$$

On déduit de là l'inégalité :

$$(J'_{2p+1} - \mu J_{2p+1})^2 < (J'_{2p} - \mu J_{2p}) (J'_{2p+2} - \mu J_{2p+2})$$

analogue à la précédente.

Maintenant, on a :

$$\alpha^2 (J_{2p} - \mu J'_{2p}) + 2\alpha\beta (J'_{2p+1} - \mu J'_{2p+1}) + \beta^2 (J_{2p+2} - \mu J'_{2p+2}) > 0$$
$$\alpha^2 (J'_{2p} - \mu J_{2p}) - 2\alpha\beta (J'_{2p+1} - \mu J_{2p+1}) + \beta^2 (J'_{2p+2} - \mu J_{2p+2}) > 0.$$

D'où l'on déduit par addition :

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 (J_{2p} + J'_{2p}) (1 - \mu) \\ &+ 2\alpha\beta (J_{2p+1} - J'_{2p+1}) (1 + \mu) \\ &+ \beta^2 (J_{2p+2} + J'_{2p+2}) (1 - \mu) \end{aligned}\right| \geqq 0.$$

Nous sommes encore amenés à la considération d'une forme quadratique définie positive dépendant des deux variables α et β. Son discriminant est certainement négatif. D'où :

$$(J_{2p+1} - J'_{2p+1})^2 < \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 (J_{2p} + J'_{2p}) (J_{2p+2} + J'_{2p+2}).$$

Mais on a :

$$J_{2p+1} - J'_{2p+1} = J_{2p+2} + J'_{2p+2} > 0.$$

Donc on peut écrire :

$$J_{2p+2} + J'_{2p+2} < \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 (J_{2p} + J'_{2p})$$

en divisant les deux membres de l'inégalité par la quantité positive :

$$J_{2p+2} + J'_{2p+2}$$

Posons enfin :

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} = L.$$

On a :

$$0 < L < 1.$$

Finalement, nous arrivons à l'inégalité fondamentale suivante :

$$J_{2p+2} + J'_{2p+2} < L^2 (J_{2p} + J'_{2p}).$$

C'est de là que nous allons tirer la preuve de la convergence des séries de Neumann.

173. Convergence des séries de Neumann.— Nous venons d'établir l'inégalité suivante :

$$(J_{2p+2} + J'_{2p-2}) < L^2 (J_{2p} + J'_{2p}).$$

On peut donc écrire :

$$J_2 + J'_2 < L^2 (J_0 + J'_0)$$
$$J_4 + J'_4 < L^2 (J_2 + J'_2)$$
$$J_6 + J'_6 < L^2 (J_4 + J'_4)$$
$$\cdots\cdots$$
$$J_{2p} + J'_{2p} < L^2 (J_{2p-2} + J'_{2p-2}).$$

Multiplions ces inégalités membre à membre. Il vient :

$$J_{2p} + J'_{2p} < (J_0 + J'_0) L^{2p}.$$

Posons :

$$J_0 + J'_0 = A.$$

Nous avons en définitive :

$$J_{2p} + J'_{2p} < AL^{2p}.$$

On conclut de là que l'on a à fortiori :

$$J_{2p} < AL^{2p}, \; J'_{2p} < AL_{2p},$$

puisque :

$$J_{2p} > 0, \; J'_{2p} > 0.$$

Donc les séries :

$$\sum J_{2p}$$

$$\sum J'_{2p}$$

$$\sum (J_{2p} + J'_{2p})$$

sont convergentes comme la progression géométrique décroissante de raison L.

Nous allons déduire de là que les séries :

$$\sum \lambda^i W_i$$

$$\sum \lambda^i V_i$$

$$\sum \lambda^i V'_i$$

$$\sum \lambda^i U_i$$

sont convergentes même pour $\lambda = +1$ et pour $\lambda = -1$.

174. Reprenons la fonction W définie plus haut comme le potentiel d'une double couche quelconque.

Écrivons :

$$J = \int_{(T)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

$$J' = \int_{(T')} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

On a :

$$J + J' = \int \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. Cette intégrale a un sens : elle représente l'énergie totale due à l'attraction de la double couche.

Considérons maintenant l'intégrale :

$$K = \int_{(S)} U^2 d\omega.$$

On a :

$$J + J' \geqq 0.$$

$$K \geqq 0$$

Étudions alors le rapport :

$$\frac{K}{J + J'}.$$

Il a certainement une limite inférieure, puisqu'il ne peut prendre que des valeurs positives. Mais a-t-il aussi une limite supérieure ? Il est facile de voir que non. En effet, $J + J'$ peut s'annuler. Cela a lieu lorsque W est le potentiel d'une double couche homogène. Mais, dans ce cas, le numérateur K reste différent de zéro. Donc le rapport en question peut devenir infini.

Un artifice va nous permettre de tourner cette difficulté.

175. Considérons l'intégrale :

$$M = \int_S (U - C)^2 \, d\omega,$$

C étant une constante.

Choisissons cette constante C de façon que l'intégrale M soit minimum. On a :

$$M = \int_S U^2 d\omega - 2C \int_S U d\omega + C^2 \int_S d\omega.$$

Pour que M soit minimum, il faut et il suffit que C vérifie la relation suivante :

$$\int_S U d\omega = C \int_S d\omega.$$

Posons :

$$S = \int_S d\omega,$$

S étant l'aire de la surface donnée. On a :

$$C = \frac{\int_S U d\omega}{S}.$$

Envisageons alors le rapport :

$$\frac{M}{J + J'}$$

et cherchons à lui assigner une limite supérieure. Nous allons voir que c'est possible.

Pour que $\frac{M}{J+J'}$ devienne infini, il faut que $J+J'$ s'annule. Si cela a lieu, on a :

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial W}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}=0$$

en tout point de l'espace. D'où :

$$W=C^{te}.$$

Mais alors W est le potentiel d'une double couche homogène. Dans ces conditions, on a :

$$\int_{(S)} U d\omega = U \int_{(S)} d\omega = US.$$

D'où :

$$U=C$$

et par suite :

$$M=0.$$

Ainsi l'égalité :

$$J+J'=0$$

entraîne l'égalité :

$$M=0.$$

On conclut de là que le rapport :

$$\frac{M}{J+J'}$$

est limité supérieurement.

Ce qui précède n'est qu'un aperçu. Mais on peut trouver une démonstration rigoureuse. Je renverrai encore pour ce point au mémoire déjà cité des *Acta Mathematica*.

Quoi qu'il en soit, admettons que l'on puisse trouver un nombre B tel que l'on ait :

$$\frac{M}{J+J'}<B,$$

quelle que soit la fonction W choisie.

176. Prenons la fonction W_p. A cette fonction est attachée une certaine constante C_p calculée au moyen de l'équation :

$$SC_p = \int_S U_p d\omega.$$

Posons :

$$M_p = \int_{(S)} (U_p - C_p)^2 d\omega.$$

On a, en vertu des conclusions du paragraphe précédent :

$$M_p < B (J_{2p} + J'_{2p}).$$

Or :

$$J_{2p} + J'_{2p} < AL^{2p}.$$

D'où :

$$M_p < ABL^{2p}$$

et l'on a en outre :

$$0 < L < 1$$

comme on l'a vu au paragraphe **172**.

On conclut immédiatement de là que les deux séries :

$$M_0 + M_1 + \dots + M_i + \dots$$

et :

$$\sqrt{M_0} + \sqrt{M_1} + \dots + \sqrt{M_i} + \dots$$

sont convergentes à la façon d'une progression géométrique.

177. Soit $d\sigma'$ l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ ayant pour centre de gravité le point $M'(x', y', z')$ de S est vu du point $M(x, y, z)$. On a :

$$d\sigma' = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega' = \frac{\cos\psi}{r^2},$$

en désignant par r la distance MM' et par ψ l'angle de la normale à S en M' avec la direction de MM'. Je rappelle que nous avons posé :

$$d\theta' = -\frac{d\sigma}{2\pi}.$$

Cela posé, on a :

$$W_p = \int_{(S)} U'_{p-1} d\theta'.$$

Considérons l'intégrale :

$$I_{p-1} = \int_{(S)} C_{p-1}\, d\theta'.$$

C'est le potentiel d'une double couche homogène et il est manifeste que l'on a :

$I_{p-1} = 2C_{p-1}$... quand M est intérieur à S

$I_{p-1} = C_{p-1}$.... quand M est sur S

$I_{p-1} = 0$........ quand M est extérieur à S.

Prenons alors le cas où le point M reste à l'extérieur de S. On peut écrire :

$$W_p = -\int_{(S)} (U'_{p-1} - C_{p-1}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \frac{d\omega'}{2\pi}.$$

Je veux montrer que la série :

$$\sum |W_p|$$

est convergente.

En effet, partons de l'identité suivante :

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 = \left(\sum a_i b_i\right)^2 + \sum (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

qui est bien connue sous le nom d'*identité de Lagrange*. On en déduit :

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 > \left(\sum a_i b_i\right)^2.$$

On passe aisément de cette inégalité à la suivante :

$$\left[\int \varphi\psi d\omega'\right]^2 < \int \varphi^2 d\omega' \int \psi^2 d\omega'$$

où φ et ψ désignent deux fonctions intégrables quelconques. Cette dernière inégalité est due à M. Schwarz.

On a d'après cela :

$$W_p^2 = \left[\int_{(S)} (U'_{p-1} - C_{p-1}) \frac{d\theta'}{d\omega'} d\omega'\right]^2$$

et :

$$W_p^2 < \int_{(S)} (U_{p-1} - C_{p-1})^2 d\omega' \int_{(S)} \left(\frac{d\theta'}{d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Envisageons l'intégrale :

$$H = \int_{(S)} \left(\frac{d\theta'}{d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

On peut écrire :

$$\frac{d\theta'}{d\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos\psi}{r^2}.$$

D'où :

$$\left(\frac{d\theta'}{d\omega'}\right)^2 < \frac{1}{4\pi^2 r^4}.$$

D'où :

$$H < \int_{(S)} \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4}.$$

Or, ici r ne peut pas s'annuler. Donc on peut assigner une limite supérieure G à H. Par suite :

$$W_p^2 < GM_{p-1}$$

et enfin :

$$W_p^2 < GABL^{2p-2}$$

On déduit de là sans peine :

$$|W_p| < \sqrt{ABG}\, L^{p-1}$$

Posons :

$$\sqrt{\frac{ABG}{L}} = g.$$

On peut écrire :

$$|W_p| < gL^p.$$

Considérons alors la série :

$$\sum \lambda^i W_i.$$

On a :

$$|\lambda^i W_i| < g\,|\lambda L|^i.$$

Donc la série envisagée est convergente comme une progression géométrique pour les valeurs de λ satisfaisant à l'inégalité :

$$|\lambda| < \frac{1}{L}.$$

En particulier, on peut prendre λ égal à $+1$. Comme tout ce qui précède est valable pour les points M extérieurs à S, on voit que le problème extérieur de Dirichlet est résolu.

178. Voyons maintenant ce qui se passe quand le point M(x, y, z) est situé à l'intérieur de S. Il faut alors modifier un peu les raisonnements précédents.

On a, cette fois :

$$W_p - 2C_{p-1} = \int_{(S)} (U'_{p-1} - C_{p-1})\, d\theta'.$$

On peut montrer d'après cela que la série :

$$\sum (W_i - 2C_{i-1})$$

est convergente. C'est alors le problème intérieur de Dirichlet qui est résolu. Les raisonnements sont d'ailleurs tout semblables à ceux du paragraphe précédent.

179. Pour que les conclusions énoncées à la fin de chacun des paragraphes **177** et **178** puissent être considérées comme rigoureusement établies, il reste encore à prouver la convergence des séries de Neumann pour le cas où le point M (x, y, z) est situé sur la surface S elle-même.

On ne peut plus faire les raisonnements qui ont réussi pour les cas des points extérieurs ou intérieurs. En effet, si nous envisageons maintenant l'intégrale :

$$\int_{(S)} \left(\frac{d\theta'}{d\omega'}\right)^2 d\omega',$$

le coefficient différentiel ne reste plus fini dans le champ d'intégration. Par suite le nombre G n'existe plus. Cependant on peut encore être assuré de la convergence de la série de Neumann. Il faut seulement construire une nouvelle démonstration.

Je n'exposerai pas ici cette démonstration. Elle est contenue

dans le mémoire des *Acta mathematica* dont j'ai déjà parlé. En voici seulement les conclusions.

En un point extérieur à S, on a, en désignant par g une certaine constante :

$$|W_p| < gL^p.$$

En un point intérieur on a de même :

$$|W_p - C_{p-1}| < gL^p$$

Pour un point situé sur S, ces inégalités ne sont plus vraies. Mais, si l'on remarque que W_p se réduit alors à U_p et si l'on appelle h une nouvelle constante indépendante de p, on peut écrire :

$$|U_p - C_{p-1}| < (g + hp) L^p.$$

Les conclusions relatives à la convergence de la série de Neumannn ne sont pas modifiées.

180. Conclusion. — Les considérations précédentes ne constituent évidemment que des aperçus. Mais une démonstration rigoureuse et complète est possible. On peut se rendre compte déjà de la direction dans laquelle il a fallu la chercher et dans laquelle il faudrait marcher pour généraliser davantage encore les circonstances où la méthode de Neumann s'applique. Bornons-nous à conclure que cette méthode donne encore la solution du problème de Dirichlet quand la surface S n'est plus *convexe*, pourvu qu'elle soit toujours *simplement connexe*. Il est probable même qu'on pourrait arriver à se débarrasser de toute restriction relative à l'ordre de connexion du domaine envisagé.

181. Définition des fonctions fondamentales. — Dans les chapitres précédents, j'ai cherché à donner partout à mes raisonnements un caractère de parfaite rigueur. Je veux maintenant terminer par quelques indications où mon but sera moins d'obtenir des conclusions définitives que de faire entrevoir comment certains problèmes doivent être posés.

Soit S une surface fermée portant une simple couche de matière attirante. Appelons T le potentiel dû à l'action de cette simple couche. Quand nous en aurons besoin, nous distinguerons

la valeur T de ce potentiel en un point intérieur à S et sa valeur T′ en un point extérieur à S. Sur S, on a :

$$T = T'$$

et :

$$\frac{dT}{dn} \neq \frac{dT'}{dn}$$

comme nous l'apprend la théorie des surfaces attirantes.

Formons les intégrales :

$$J = \int_{(T)} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

$$J' = \int_{(T')} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

étendues respectivement aux espaces intérieur et extérieur à S.

Le théorème de Green montre que l'on a :

$$J = \int_{(S)} T \frac{dT}{dn} d\omega$$

et :

$$J' = -\int_{(S)} T' \frac{dT'}{dn} d\omega.$$

D'ailleurs on peut écrire :

$$J = \int_{(S)} T \frac{dT}{dn} d\omega$$

$$J' = -\int_{(S)} T \frac{dT'}{dn} d\omega.$$

Les deux quantités J et J′ sont essentiellement positives. Elles ont donc chacune un minimum.

Assujettissons les fonctions T à la condition suivante :

$$J' = 1.$$

Considérons, parmi toutes les fonctions T qui vérifient cette relation, celle qui fait prendre à J sa valeur minimum. Elle n'est certainement pas identiquement nulle.

[illegible]

$$[illegible] = 1.$$

[illegible] minimum. [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] considérées. [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] de l'autre. Donc il existe une [illegible] ait :

$$\int \left(\frac{dT}{dn} - h \frac{dT}{dn} \right) \delta T d\omega = 0$$

quel que soit le choix fait pour la fonction δT. On en conclut

que la fonction T considérée — que nous désignerons dorénavant par T_1 — vérifie la relation :

$$\frac{dT_1}{dn} + h_1 \frac{dT'_1}{dn} = 0$$

en tout point de S.

D'ailleurs J atteint évidemment son minimum pour la fonction potentielle qui correspond à la distribution d'équilibre d'une couche électrique répandue sur la surface S regardée comme conductrice. Dans ce cas, on a :

$$\frac{dT_1}{dn} = 0.$$

D'où :

$$h_1 = 0.$$

Telle est la première fonction fondamentale.

Considérons maintenant les fonctions T vérifiant les relations suivantes :

$$J' = 1$$

$$\int_{(S)} T \frac{dT'_1}{dn} d\omega = 0.$$

Il existe une fonction T_2 de cet ensemble qui rend J minimum.

Le calcul des variations montre sans peine que cette fonction satisfait en tout point de S à l'équation :

$$\frac{dT_2}{dn} + h_2 \frac{dT'_2}{dn} = k \frac{dT'_1}{dn}.$$

Je dis que l'on a :

$$k = 0.$$

En effet, multiplions les deux membres de la précédente égalité par :

$$T_1 d\omega$$

et intégrons. On trouve :

$$\int_{(S)} T_1 \frac{dT_2}{dn} d\omega + h_2 \int_{(S)} T_1 \frac{dT'_2}{dn} d\omega = k \int_{(S)} T_1 \frac{dT'_1}{dn} d\omega,$$

Mais on a :

$$\int_S T_1 \frac{dT_2}{dn} d\omega = \int_S T_1 \frac{dT_1}{dn} d\omega = 0,$$

puisque :

$$\Delta T_1 = 0, \quad \Delta T_2 = 0$$

et que :

$$T_1 = C^{te}$$

à l'intérieur de S. D'autre part :

$$\int_S T_1 \frac{dT_2}{dn} d\omega = \int_S T_2 \frac{dT_1'}{dn} d\omega = 0,$$

en vertu des hypothèses faites. Enfin :

$$\int_S T_1 \frac{dT_2}{dn} d\omega = -J = -1.$$

Donc :

$$k = 0.$$

On voit par là que la seconde fonction fondamentale T_2 vérifie la relation :

$$\frac{dT_2}{dn} - h_2 \frac{dT_2}{dn} = 0.$$

D'ailleurs on a :

$$\int_S T_2 \frac{dT_2}{dn} d\omega - h_2 \int_S T_2 \frac{dT_2}{dn} d\omega = 0.$$

D'où :

$$h_2 - J.$$

ce qui montre que h_2 est positif.

On peut procéder ainsi de proche en proche. On définit de la sorte une suite illimitée de constantes positives croissantes :

$$h_1 h_2 h_3 \ldots h_i \ldots$$

auxquelles correspondent des fonctions :

$$T_1 T_2 T_3 \ldots T_i .$$

jouissant des propriétés suivantes :

$$\Delta T_i = 0\ldots\ldots \text{ à l'intérieur de S}$$

$$\Delta T'_i = 0\ldots\ldots \text{ à l'extérieur de S}$$

$$T_i = T'_i\ldots\ldots \text{ sur S}$$

$$\frac{dT_i}{dn} + h_i \frac{dT'_i}{dn} = 0\ldots\ldots \text{ sur S.}$$

De plus T'_i est une fonction régulière à l'infini. Enfin on a :

$$J'_i = 1$$

$$J_i = h_i$$

$$\int_{(S)} T_i \frac{dT'_k}{dn} d\omega = 0\ldots \text{ si } i \neq k$$

$$\int_{(S)} T_i \frac{dT_k}{dn} = 0\ldots \text{ si } i \neq k.$$

Les fonctions T_i ainsi définies portent le nom de *Fonctions fondamentales*.

182. On peut former facilement les fonctions fondamentales dans le cas de la sphère.

Appelons alors X_n une fonction sphérique. Posons :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On a alors :

$$T_n = X_n \rho^n$$

$$T'_n = \frac{X_n}{\rho^{n+1}}.$$

On a bien :

$$T_n = T'_n$$

et :

$$\frac{dT_n}{dn} + \frac{n}{n+1} \frac{dT'_n}{dn} = 0$$

pour $\rho = 1$, en supposant que le rayon de la sphère envisagée soit égal à l'unité.

183. On peut encore former les fonctions fondamentales dans le cas d'un ellipsoïde représenté par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Passons en effet en coordonnées elliptiques. Considérons les quadriques définies par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Ce sont les quadriques homofocales à l'ellipsoïde donné. Par chaque point de l'espace, il passe trois de ces quadriques. Les valeurs correspondantes du paramètre λ seront désignées par ρ, μ, ν. On a par exemple :

Pour $\lambda = \rho$ . . . un ellipsoïde.

Pour $\lambda = \mu$. . . un hyperboloïde à une nappe.

Pour $\lambda = \nu$ . . . un hyperboloïde à deux nappes.

Les nombres ρ, μ, ν constituent ce qu'on appelle les coordonnées elliptiques d'un point.

On connaît la définition des *fonctions de Lamé*. Elles sont de la forme :

$$\text{RMN}$$

et l'on a :

$$R = f(\rho)$$
$$M = f(\mu)$$
$$N = f(\nu).$$

Le produit RMN définit une fonction harmonique à l'intérieur de la surface S donnée. Nous posons :

$$T = \text{RMN}.$$

Maintenant, on peut construire une fonction R' telle que le produit :

$$\text{R'MN}$$

soit harmonique à l'extérieur de S et que pour $\rho = 0$ on ait :

$$R' = R.$$

On pose alors :

$$T' = R'MN.$$

A une longueur infiniment petite prise sur la normale à l'ellipsoïde donné correspond un accroissement $d\rho$ de ρ. On a d'ailleurs :

$$d\mu = 0, \quad d\nu = 0.$$

D'où :

$$\frac{dT}{dn} = \frac{dR}{d\rho} MN \frac{d\rho}{dn}$$

et :

$$\frac{dT'}{dn} = \frac{dR'}{d\rho} MN \frac{d\rho}{dn}.$$

D'où :

$$\frac{dT}{dn} = \frac{\frac{dR}{d\rho}}{\frac{dR'}{d\rho}} \frac{dT'}{dn}$$

Posons :

$$h = -\frac{\frac{dR}{d\rho}}{\frac{dR'}{d\rho}}.$$

On en déduit :

$$\frac{dT}{dn} + h \frac{dT'}{dn} = 0.$$

D'ailleurs, h est la valeur de :

$$-\frac{\frac{dR}{d\rho}}{\frac{dR'}{d\rho}}$$

pour $\rho = 0$: c'est donc bien une constante.

184. Revenons au cas général et appelons Φ une fonction quelconque définie sur S.

De nombreuses analogies portent à penser que la fonction Φ est toujours développable en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

On aurait alors :

$$\Phi = \sum A_i T_i, \tag{1}$$

les A_i étant des constantes.

Si l'on admet la possibilité du développement, le calcul des coefficients A_i est facile.

Multiplions en effet les deux membres de l'égalité (1) par :

$$\frac{dT'_i}{dn} d\omega$$

et intégrons. On a :

$$\int_{(S)} T_k \frac{dT'_i}{dn} d\omega = 0$$

$$\int_{(S)} T_i \frac{dT'_i}{dn} d\omega = -1.$$

D'où :

$$A_i = -\int_{(S)} \Phi \frac{dT'_i}{dn} d\omega.$$

On sait donc former la série (1).

Soit W la somme de la série (1) en des points non situés sur S. On voit que W est une fonction harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S, car W est le potentiel d'une simple couche. De plus, W se réduit à Φ sur S. Donc W est la fonction qui résout le problème de Dirichlet tant intérieur qu'extérieur.

185. Application à la méthode de Neumann. — Revenons à la détermination d'une double couche dont le potentiel W vérifie la relation :

$$V - V' = \lambda (V + V') + 2\Phi \tag{1}$$

en tout point de S.

On peut écrire, en supprimant les indices pour abréger l'écriture :

$$\Phi = \sum \alpha T$$

$$W = \sum \beta T$$

$$W' = \sum \beta' T.$$

On a :

$$\frac{dT}{dn} - h \frac{dT}{dn'} = 0.$$

D'autre part :

$$\sum \beta \frac{dT}{dn} = \sum \beta' \frac{dT}{dn'}$$

puisque :

$$\frac{dW}{dn} = \frac{dW'}{dn'}.$$

D'où :

(2) $$\beta - h\beta' = 0.$$

Mais la relation (1) donne :

$$\beta - \beta' = \lambda(\beta - \beta') - 2\alpha.$$

Comparons (1) et (2) :

$$\beta'(1 - h) = \lambda\beta'(1 - h) - 2\alpha$$

Cette équation permet de calculer β', puisqu'on connaît α. On a ensuite β par la relation (2). On trouve :

$$\beta' = \frac{2\alpha}{1 - h - \lambda(1 - h)}$$

$$\beta = -\frac{2\alpha h}{1 - h - \lambda(1 - h)}.$$

D'après cela, W et W' se présentent comme des fonctions méro-

morphes de λ. Le module du pôle dont le module est le plus petit est :

$$\frac{1+h_2}{1-h_2}.$$

Il est plus grand que 1. Donc le cercle de convergence des séries de Neumann est plus grand que 1. Il n'y a d'exception à cela que si l'une des quantités h est nulle. On a :

$$h_1 = 0.$$

Donc les conclusions précédentes supposent une condition :

$$\alpha_1 = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente à la condition :

$$C = 0$$

que nous avions rencontrée dans l'étude directe de la méthode de Neumann. Il est visible enfin que, pour le problème extérieur, il n'y a pas de condition semblable, à cause de la présence de h au numérateur de β'. On voit en effet que, pour $h_1 = 0$, on a :

$$\beta_1' = 0.$$

sans qu'il soit forcé pour cela que α_1 soit nul.

En résumé, faisons $\lambda = 1$ dans les séries de Neumann. Il vient :

$$W = \sum \frac{\alpha}{h} T$$

$$W' = -\sum \alpha T.$$

On a ainsi la solution du problème extérieur de Dirichlet. Mais il y a une condition de possibilité. Cette condition est nécessaire pour que nos séries représentent la solution, c'est-à-dire pour que celle-ci puisse être regardée comme un potentiel de double couche.

Faisons maintenant $\lambda = -1$. On trouve :

$$W = \sum \alpha T$$

$$W' = \sum \alpha h T.$$

On a de la sorte la solution du problème intérieur de Dirichlet.

Mais cette fois, il n'y a pas de condition de possibilité. La solution est toujours assimilable à un potentiel de double couche.

186. Application à un problème analogue à celui de Dirichlet.
Reprenons les notations :

$$W, W', V, V'$$

dont nous nous sommes déjà servi.

Cherchons à construire une fonction jouissant des propriétés suivantes :

$$\Delta W = 0$$

$$\Delta W' = 0$$

$$\frac{dV}{dn} - \frac{dV'}{dn} = \lambda\left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn}\right) + 2\Phi,$$

Φ étant une fonction donnée sur S.

Posons :

$$W = \sum \lambda^i W_i$$

$$W' = \sum \lambda^i W'_i$$

$$V = \sum \lambda^i V_i$$

(1) $$V' = \sum \lambda^i V'_i$$

$$\frac{dV}{dn} = \sum \lambda^i \frac{dV_i}{dn}$$

$$\frac{dV'}{dn} = \sum \lambda^i \frac{dV'_i}{dn}.$$

On voit que les fonctions W_i sont des potentiels de simples couches dont les densités sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dV_0}{dn} - \frac{dV'_0}{dn} = 2\Phi$$

$$\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV'_1}{dn} = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV'_0}{dn}$$

. . . .

$$\frac{dV_i}{dn} - \frac{dV'_i}{dn} = \frac{dV_{i-1}}{dn} + \frac{dV'_{i-1}}{dn}$$

. . . .

On peut donc former les séries (1).

Cela posé, la convergence des séries (1) peut être étudiée par des procédés tout à fait semblables à ceux que nous avons employés à propos du problème de Neumann. Les conclusions sont les mêmes. On voit donc que, pourvu que le domaine envisagé soit simplement connexe, on peut résoudre le nouveau problème que nous venons de poser.

Pour $\lambda = \pm 1$, on retombe sur le problème étudié au paragraphe **175**. Dans le cas du problème intérieur, il y a une condition de possibilité.

$$\int_S \Phi d\omega = 0.$$

Mais dans le cas du problème extérieur, il n'y a plus aucune condition de possibilité.

187. Voyons le rôle joué ici par les fonctions fondamentales.

Tout porte à penser qu'une fonction arbitraire Φ peut être développée en série de la forme suivante :

$$\Phi = \sum A_i \frac{dT_i}{dn}.$$

Si l'on admet la possibilité de ce développement, il est facile de calculer les coefficients A_i. On a :

$$\int_S T_i \frac{dT_k}{dn} d\omega = 0.$$

D'où :

$$\int_S \Phi T_i d\omega = A_i \int_S T_i \frac{dT_i}{dn} d\omega.$$

Or :

$$\int_S T_i \frac{dT_i}{dn} d\omega = -1.$$

Par suite :

$$A_i = -\int_S \Phi T_i d\omega.$$

Appliquons ce résultat à notre problème.

Posons :

$$\Phi = \sum \alpha \frac{dT'}{dn}$$

et prenons :

$$W = \sum \beta T.$$

On a :

$$\frac{dV'}{dn} = \sum \beta \frac{dT'}{dn}$$

et :

$$\frac{dV}{dn} = \sum \beta \frac{dT}{dn} = -\sum \beta h \frac{dT'}{dn}.$$

La relation qui doit être vérifiée sur S donne alors :

$$-\beta(1+h) = \lambda\beta(1-h) + 2\alpha.$$

Par suite :

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+h+\lambda(1-h)}$$

Mais on a :

$$\frac{1}{1+h+\lambda(1-h)} = \sum (-1)^m \lambda^m \frac{(1-h)^m}{(1+h)^{m+1}}.$$

On conclut de là :

$$W_p = (-1)^{p+1} \sum \frac{2\alpha T}{1+h} \left(\frac{1-h}{1+h}\right)^p.$$

188. On a :

$$\frac{1-h}{1+h} < 1$$

si h est positif. Dans ce cas, il est clair que W_p tend vers zéro quand p augmente indéfiniment.

Mais si on a :

$$\alpha_1 \neq 0$$

le terme en h_1 ne disparaît pas.

On a :

$$\frac{1-h_1}{1+h_1} = 1$$

puisque h_1 est nul. D'où :

$$\lim (-1)^p W_p = -2\alpha_1 T_1$$
$$\lim (-1)^p W'_p = -2\alpha_1 T'_1.$$

On a donc là un moyen de calculer T_1 et T'_1, c'est-à-dire le potentiel en un point intérieur et en un point extérieur d'une distribution électrique en équilibre sur S.

On retrouve ainsi la *méthode de M. Robin* pour déterminer une couche attirante étalée sur une surface fermée S et sans action sur un point intérieur.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

POTENTIEL EN UN POINT EXTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES ÉQUATION DE LAPLACE. — EXEMPLES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

CHAPITRE II

POTENTIEL EN UN POINT INTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES FORMULE DE POISSON

CHAPITRE III

SURFACES ATTIRANTES ET LIGNES ATTIRANTES

SURFACES ATTIRANTES

LIGNES ATTIRANTES

CHAPITRE IV

LA FONCTION DE GREEN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

CHAPITRE V

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE. — THÉORÈME DE HARNACK.

CHAPITRE VI

DOUBLES COUCHES

CHAPITRE VII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET LA MÉTHODE DU BALAYAGE

CHAPITRE VIII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET LA MÉTHODE DE NEUMANN

CHAPITRE IX

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE NEUMANN AU CAS DES DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES. — LES FONCTIONS FONDAMENTALES

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY



